Frit fald med luftmodstand

Indholdsfortegnelse

ABSTRACT **1**
INDLEDNING **2**
NEWTONS 2. LOV **2**
BEVIS FOR SEPARATION AF DE VARIABLE **3**
FRIT *FALD UDEN LUFTMODSTAND* **7**
FRIT FALD MED LUFTMODSTAND **8**
FRIT FALD LUFTMODSTAND, DER ER PROPORTIONAL MED HASTIGHEDEN. **9**
FRIT FALD MED LUFTMODSTAND, DER ER PROPORTIONAL MED KVADRATET PÅ HASTIGHEDEN. **13**
FORSØG **23**
1. FORSØG - VOLLEYBALLEN 23
DATABEHANDLING **26**
1. FORSØG - VOLLEYBALL 26
KONKLUSION **29**
LITTERATURLISTE **31**
BILAG **32**
BILAG 1 32
Model 1 .... *33*
Model 2 .... *34*

ABSTRACT

This paper investigates the free fall in a gravitational field with air resistance. The study theoretically describes the motion of a vertical throw by putting forward differential equations and subsequently solving them using mathematical demonstrations. The differential equations are advanced based on physical law such as Newton's second law.
Two different experiments are made and the data from the experiments are compared with the theoretical description of the motion for a vertical throw. The results are as might be expected not exactly the same but especially for one of the experiments the results were incredibly close. With aberrations from 0.75 % to 49.29 % it is hard to make a conclusion but especially for the

experiment with aberrations on 49.29 % the sources of errors were many. So all in all the models were satisfying.

Indledning

Denne opgave omhandler det frie fald med luftmodstand. Der opstilles en differentialligning, der beskriver det frie fald med luftmodstand. Differentialligningen løses i de to tilfælde hvor modstanden er proportional med hhv. v og v^2. Til at løse differentialligningen bruges der en metode, der kaldes separation af de variable som i opgaven bevises. Det teoretiske beregninger sammenlignes med data fra to forsøg, henholdsvis et forsøg med et lodret kast af en volleyball og et lodret kast af et kæmpekaffefilter. Under hele opgaven understøttes beregningerne med fysiske begreber heriblandt Newtons 2. lov.

Newtons 2. lov

Den engelske naturvidenskabsmand Isaac Newton (1642-1727) opstillede i sit værk Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Latin. Oversat til dansk: Naturfilosofiens matematiske principper) i 1687 mekanikkens bevægelseslove, den indeholdte den matematiske formel, der lyder; kraften på et legeme er lig med dets masse ganget med dets acceleration.[1] Det vil sige:

$$F = m \cdot a$$

hvor
F angiver kraften.
m angiver massen af genstanden.
a angiver accelerationen, der er et udtryk for ændringen af hastigheden per tidsenhed.

Denne formel er kendt som Newtons 2. lov men kaldes også kraftloven.
Det kan umiddelbart være svært af forstå, hvad en kraft er men det er sådan set ikke så indviklet. En kraft kan give en genstand (materiel partikel) en acceleration – mest kendt er nok tyngdekraften. Hvis Genstanden/partikelen ikke er påvirket af kræfter vil dens acceleration være lig med nul.

[1] [XII]

For en partikel med massen m gælder følgende sammenhæng mellem tilvæksten i tid af partiklens impuls $\vec{p}$ og de kræfter, der virker på partiklen.

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{res}$,
hvor $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ er partiklens impuls[2].

I ovenstående ligning angiver venstre side den tidslige differentialkvotient af en tidsafhængig impuls $\vec{p}$. Højre side definerer størrelsen af det, der kaldes den resulterende kraft F_{res}. Denne beregnes som vektorsummen af de virkende enkeltkræfter.
Partiklens impuls kan derfor ændres enten ved at partiklens masse forandres eller ved at partiklens hastighed ændres.

Hvis massen m af partiklen er konstant fremkommer ligningen:

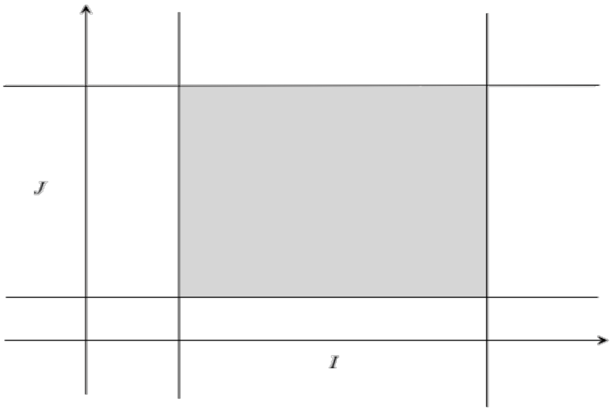
$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{res}$$

I ovenstående ligning definerer $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ partiklens acceleration, der er forskellig fra nul, hvis hastigheden $\vec{v}$ afhænger af tiden t. [3]

Bevis for separation af de variable

Bevis for sætningen ”separation af de variable”, som er differentialligninger af formen
$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)\ eller\ y' = h(x) \cdot g(y)$.

[2] [VIII]
[3] [XIII]



Figur, der viser det interval løsningen ligger i.[4]

Sætning:

Lad $h(x)$ være kontinuert i et interval I og lad $g(y)$ være kontinuert og forskellig fra nul i interval J.

$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)\ eller\ y' = h(x) \cdot g(y)$ løses i I·J.

Der gælder da at løsningerne til differentialligningen

$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)\ eller\ y' = h(x) \cdot g(y)$ er de samme som løsningerne til

$G(y) = H(x) + k$ (k er en vilkårlig konstant), hvor y er den ubekendte funktion og $G(y)$ er en stamfunktion til $\frac{1}{g(y)}$, det betyder at $G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy$.

$H(x)$ er en stamfunktion til $h(x)$, det vil sige at $H(x) = \int h(x)dx$.

Bemærkninger:

Ligningen $G(y) = H(x) + k$ kan ved brug af det ubestemte integral omskrives til:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x)dx.$$

Vi kommer frem til denne ligning ved at foretage følgende omskrivninger af den oprindelige differentialligning:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

$\Updownarrow$ (ganger med dx på begge sider af lighedstegnet)

[4] Figuren er fremstillet direkte efter figuren i kilde [III] s. 229.

$dy = h(x) \cdot g(y)dx$

$\Updownarrow$ (dividerer med $g(y)$, der som tidligere nævnt er forskelligt fra nul)

$\frac{1}{g(y)}dy = h(x)dx$

$\Updownarrow$ (indsætter et integraltegn på begge sider af lighedstegnet)

$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int h(x)dx$

<u>Beviset:</u>

Vi skal da vise at:

$f(x)$ er en løsning til differentialligningen $y' = h(x) \cdot g(y)$ præcis når $f(x)$ er en løsning til ligningen $G(y) = H(x) + k$.

Vi antager først, at f(x) er løsning til $y' = h(x) \cdot g(y)$ (med andre ord: vi ved at f(x) indsat på y's plads vil få ligningen til at stemme, altså glæder der at $f'(x) = h(x) \cdot g\big(f(x)\big)$.

Vi skal nu vise at f(x) er løsning til $G(y) = H(x) + k$, dvs. vi skal vise, at der gælder følgende:

$G(f(x)) = H(x) + k$ eller at $G\big(f(x)\big) - H(x) = k$.

Vi skal således vise, at funktionen $G\big(f(x)\big) - H(x)$ er en konstant. Dette kan vi gøre ved at differentiere funktionen, og indse at differentialkoefficienten er nul (her huskes, at $G(y)$ er en stamfunktion til $\frac{1}{g(y)}$ og at $H(x)$ er en stamfunktion til $h(x)$, samt hvordan vi differentiere em sammensat funktion):

$$\Big(G\big(f(x)\big) - H(x)\Big)' = G'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) - H'(x) = \frac{1}{g\big(f(x)\big)} \cdot f'(x) - h(x)$$

Vi ved af $f'(x) = h(x) \cdot g(f(x))$. Dette indsættes i ligningen ovenover og derved får vi:

$$\left(G\big(f(x)\big)+H(x)\right)' = \frac{1}{g\big(f(x)\big)} \cdot h(x) \cdot g\big(f(x)\big) - h(x) = h(x) - h(x) = 0$$

Vi antager nu at $f(x)$ er løsning til $G(y) = H(x) + k$, og skal derfor vise at f(x) er løsning til $y' = h(x) \cdot g(y)$, altså vise at $f'(x) = h(x) \cdot g\big(f(x)\big)$.

Da $f(x)$ er løsning til $G(y) = H(x) + k$, ved vi at $G(f(x)) = H(x) + k$. Ved at differentiere på begge sider af lighedstegnet får vi:

$\frac{1}{g\big(f(x)\big)} \cdot f'(x) = h(x)$

$\Updownarrow$

$f'(x) = h(x) \cdot g(f(x))$, hvilket var hvad vi ønskede.

Sætningen, der umiddelbart virker lidt uoverskuelig kaldes separation af de variable.

For at overskueliggøre sætningen ser vi igen på differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

Ved multiplikation med dx og division med g(y) på begge sider af lighedstegnet fås:

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

$$\Updownarrow$$

$$dy = h(x) \cdot g(y) \cdot dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{g(y)} \cdot dy = h(x)dx$$

Tager vi herefter integralet på begge sider af lighedstegnet, fremkommer:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int h(x)\,dx$$

Ovenstående er akkurat det sammen som indholdet af bemærkningen, der underbygger sætningen.

Her er det dog vigtigt at understrege at en løsning kun ligger i et interval, hvormed der menes en sammenhængende talmængde. [5]

[5] Beviset er inspireret af [XIV] side 11-14 og [III] side 228-231.

Frit fald uden luftmodstand

Når der er tale om et frit fald uden luftmodstand menes der en genstand, som frit bevæger sig lodret i tyngdefeltet. Det vil sige en endimensionel bevægelse, hvor genstanden udelukkende er påvirket af tyngdefeltet.
Hvis vi tager udgangspunkt i et frit faldende objekt her på jorden, vil objektet påvirkes af jordens tyngdefelt dvs. tyngdeaccelerationen. Vi antager, at tyngdeaccelerationen er konstant og fastlagt til 9,8166 $\frac{m}{s^2}$ her i Danmark.[6] Tyngdeaccelerationen på jorden varierer i forhold til hvilken breddegrad du befinder dig på, idet jorden ikke er kuglerund men lidt fladtrykt. Tyngdeaccelerationen ved ækvator er lavest, 9,780 $\frac{m}{s^2}$, idet afstanden til centrum af jorden er længst på det pågældende sted. Tyngdeaccelerationen er imidlertid størst ved jordens poler. Her er tyngdeaccelerationen hele 9,83 $\frac{m}{s^2}$.[7] Den gennemsnitlige tyngdeacceleration er fastlagt til 9,807 $\frac{m}{s^2}$.[4]

Tyngdeaccelerationen på en bestemt lokalitet kan beregnes på følgende måde:

$$g = 9{,}80612 - 0{,}025865 \cdot cos(2 \cdot \varphi) + 0{,}000058 \cdot cos2(2 \cdot \varphi),$$

hvor φ er breddegraden.[8]

Ydermere skal man være opmærksom på at tyngdeaccelerationen også ændre sig ift. hvor højt over jordens overflade du befinder dig.

Da objektet kun er påvirket af tyngdekraften, kaldet F_t, er den resulterende kraft $F_{res} = F_t$. Vi kalder da objektets masse m og $F_t = -m \cdot g$, hvor g er tyngdeaccelerationen.
Tyngdekraften er negativ da den er nedadrettet. Derfor gælder følgende:

$$F_{res} = -m \cdot g$$

Ifølge Newtons 2. lov er $F_{res} = a \cdot m$, hvor a er accelerationen. Hvis dette indsættes i ovenstående formel fremkommer:

---

[6] [XI] s. 27
[7] [XI] s. 27
[8] [V]

$$a \cdot m = -m \cdot g$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{a \cdot m}{m} = \frac{-m \cdot g}{m}$$
$$\Updownarrow$$
$$a = -g$$

Det vil sige at bevægelsens acceleration er konstant nedadrettet.[9]

Hvis man ønsker at regne på det frie fald uden luftmodstand kan man benytte følgende formler:

$$v_y = -g \cdot t + v_{0y}$$

og

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + y_0$$

$y(t)$ er en stedfunktion for et frit fald med konstant tyngdeacceleration g, begyndelseshastigheden v_{0y} og begyndelsespositionen y_0. v_y er den tilhørende hastighedsfunktionen.[10]

Frit fald med luftmodstand

Når man regner på et frit fald med luftmodstand bliver det straks langt mere kompliceret end uden luftmodstand. Der skal endda anvendes forskellige modeller i forskellige tilfælde.
En måde hvorpå man kan bestemme hvilken model, der skal bruges i det pågældende tilfælde er Reynolds tal (Reynolds number)[11], der bestemmes på følgende måde:

$$Re = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta}$$

hvor

ρ angiver densiteten af det medium, genstanden bevæger sig i, eksempelvis luft.

η angiver mediets dynamiske viskositet.

---

[9] [VI] s. 209 og [VII] s. 235.
[10] [VI] s. 209
[11] [XV] s. 3

v angiver genstandens hastighed i forhold til mediet.

L angiver den karakteristisk længde af genstanden, det kan eksempelvis være diameteren for en kugle.

Det har vist sig at hvis Reynoldstallet er mindre end en (Re<1) er det udmærket at formode at luftmodstanden er proportional med hastigheden. Skal Reynoldstallet være mindre end 1, skal genstanden enten være yderst lille og ikke have for stor hastighed eller befinde sig i en væske med ret stor viskositet. Dette vil nærmest aldrig være tilfældet for bevægelse i atmosfærisk luft.

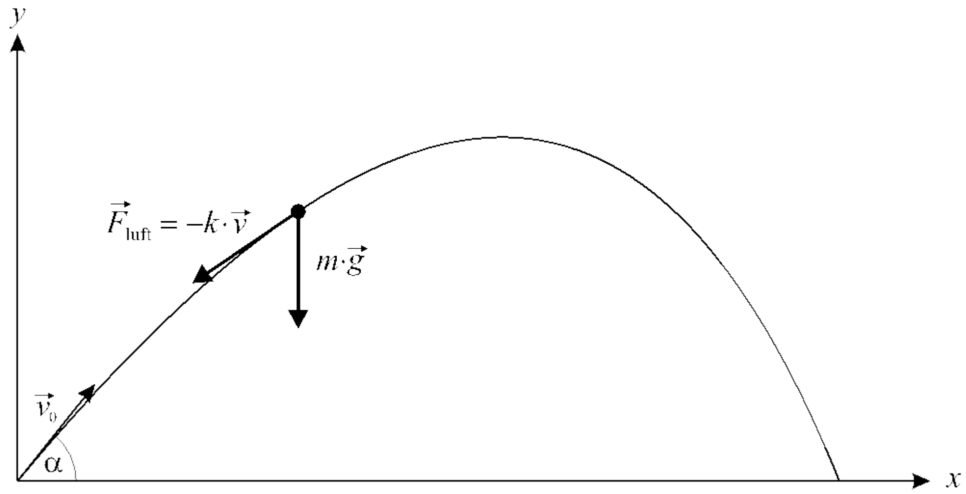
Befinder Reynoldstallet sig derimod i intervallet fra tusind til trehundredetusind (1000<Re<300000) kan man med fordel forudsætte at luftmodstanden er proportional med kvadratet på farten, det vil sige at luftmodstanden er modsatrettet hastigheden. Forholder det sig sådan at Reynoldstallet ligger i intervallet et til et-tusind (1<Re<1000) er der tale om en mellemting, hvilket betyder at det er vanskeligt at benytte en model. Hverken modellen hvor luftmodstanden er proportional med hastigheden eller modellen hvor luftmodstanden er proportional med kvadratet på hastigheden passer tilfredsstillende.

Er Reynoldstallet lille er flowet rundt om genstanden laminært, hvormed der menes at der ikke dannes en masse hvirvler. Men er Reynoldstallet stort dannes der en masse hvirvler, hvilket kaldes turbulent.

Frit fald luftmodstand, der er proportional med hastigheden.

Hvis vi iagttager det skrå kast med hastighedsproportional luftmodstand i et koordinatsystem, vil en genstand i frit fald, der er sendt af sted med en hastighed på v_0 i vinklen α fra 1. aksen til retningen af v_0 kaldet elevationsvinklen (af fransk: élévation = stigning)[12], være påvirket af disse kræfter:

[12] [VII] s. 240



Billedet er kopieret fra kilde [XV] s. 4.

Vi ser igen på Newtons 2. lov, der som tidligere nævnt fortæller at:

$$F_{res} = m \cdot a$$

altså, at den resulterende kraft på genstanden, er lig massen for genstanden gange genstandens acceleration. Hvilket også kan skrives på følgende måde:

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{res}$$

Dernæst udnytter vi at der gælder følgende:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}' = \vec{a}$$

Vi kan derfor indsætte $\vec{v}'$ på $\vec{a}$'s plads i formlen

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{v}'$$

Den resterende kraft i et skråt kast med luftmodstand er tyngdekraften minus luftmodstanden. Det kan skrives på følgende måde:

$$\vec{F}_{res} = m \cdot \vec{g} - k \cdot \vec{v}$$

Det er da muligt at opstille følgende differentialligning for det skrå kast:

$$m \cdot \vec{v}' = m \cdot \vec{g} - k \cdot \vec{v},$$

hvor koordinatsættet til $\vec{v} = \binom{v_x}{v_y}$ og koordinatsættet til $\vec{g} = \binom{0}{-g}$.

k angiver en luftmodstandparameter for genstanden.

Hvis vi indsætter koordinaterne i ovenstående differentialligning, fremkommer følgende koordinater:

$$m \cdot (v_x)' = m \cdot 0 - k \cdot v_x \Leftrightarrow (v_x)' = -\frac{k}{m} \cdot v_x$$
$$m \cdot \left(v_y\right)' = m \cdot (-g) - k \cdot v_y \Leftrightarrow \left(v_y\right)' = -\frac{k}{m} \cdot v_y - g$$

Hvis genstanden befinder sig i (0,0) til tiden t=0 og hastighedsvektoren til samme tidspunkt danner vinklen α med 1-aksen, så har vi randbetingelser, hvor $\vec{r} = (x(t), y(t))$ er genstandens stedvektor:

$$x(0) = y(0) = 0$$
$$v_x(0) = v_0 \cdot \cos(\alpha), \qquad v_y(0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

Det skrå kast er et frit fald i to dimensioner, hvilket betyder at det er nødvendigt at arbejde både med en x- og en y-koordinaten til vektorerne. Men da jeg blot beskæftiger mig med det frie fald i en dimension nemlig det lodrette kast, behøver jeg udelukkende at arbejde med y-koordinaten:

$$\left(v_y\right)' = -\frac{k}{m} \cdot v_y - g$$

Denne differentialligning er en 1. ordens lineær differentialligning på formen $y' = a \cdot y + b$ der har løsningen:

$$y = c \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a},$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Beviset for samtlige løsninger af differentialligningen $y' = a \cdot y + b$ kan ses i bilag 1 model 2 (+ model 1).

Samtlige løsninger til differentialligningen $\left(v_y\right)' = -\frac{k}{m} \cdot v_y - g$ er da

$$v_y = c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k}.$$

Jeg anvender nu randbetingelserne til at bestemme den vilkårlige konstant c:

$$v_y = c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k}$$

$\Updownarrow$ (indsætter randbetingelserne $v_y(0) = v_0 \cdot \sin(\alpha)$ og t=0)

$$v_0 \cdot sin(\alpha) = c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} - \frac{m \cdot g}{k}$$

$\Updownarrow$ (lægger $\frac{m \cdot g}{k}$ til på begge sider af lighedstegnet)

$$v_0 \cdot sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k} = c \cdot e^0$$

⇕ $(e^0 = 1$ og c·1=c)

$c = v_0 \cdot sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}$

Jeg indsætter nu udtrykket for c i $v_y = c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k}$:

$$v_y = \left(v_0 \cdot sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k}$$

Vi har nu bestemt hastighedsudtrykket for vores genstand. For nu at bestemme stedfunktionen for genstanden, skal udtrykket v_y integreres, da vi ved at $\int v(t)dt = y(t)$:

$$\int \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\left(\frac{k}{m}\right) \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} dt$$

$\left(\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx\right)$

$$= \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot \int e^{-\left(\frac{k}{m}\right) \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} dt$$

$\left(\int e^{k \cdot x} dx = \frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}\right)$

$$= \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot \frac{1}{-\frac{k}{m}} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \int \frac{m \cdot g}{k} dt$$

$\left(\int \frac{m \cdot g}{k} dt = \frac{m \cdot g}{k} \cdot t\right)$

$$= \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot \frac{-m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + c_2$$

Ved integrationen fremkommer udtrykket:

$$y(t) = -\frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + c_2$$

hvor c_2 er en vilkårlig konstant.

Ved at benytte randbetingelserne, kan konstanten c_2 bestemmes:

$y(t) = -\frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + c_2$

⇕ (indsætter randbetingelserne y(0)=0 og t=0)

$0 = -\frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} - \frac{m \cdot g}{k} \cdot 0 + c_2$

⇕ (isolerer c_2)

$c_2 = \frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right)$

Konstanten indsættes nu i udtrykket:

$$y(t) = -\frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + \frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right)$$

Vi har nu vores y(t)-udtryk.

Frit fald med luftmodstand, der er proportional med kvadratet på hastigheden.

Ser man en genstand i frit fald, må den resulterende kraft på genstanden F_{res} være:

$$F_{luft} = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Hvor[13]

c_w er formmodstanden også kaldet drag koefficient, bestemt af formen og overflade friktionen for genstanden.

ρ er mediets densitet.

A er genstandens største overfladeareal, vinkelret på bevægelsesretningen.

v er genstandens hastighed.

Dvs. at for en genstand i frit fald, må den resulterende kraft på genstanden F_{res} være:

$$F_{res} = -m \cdot g + F_{luft}$$

Dvs.

$$F_{res} = -m \cdot g + \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

For at forenkle ligningen, indføres konstanten D, der gives ved $D = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A$, således at ligningen kommer til at se ud på følgende måde:

[13] [X] s. 23

$$F_{res} = -m \cdot g + D \cdot v^2$$

Ifølge Newtons 2. lov[14] er $F_{res} = m \cdot a$, og i og med at vi ved, at $a = \frac{dv}{dt} = v'$ må genstanden i frit fald opfylde følgende differentialligning:

$$m \cdot v' = -m \cdot g + D \cdot v^2$$

Jeg indfører størrelsen k, som er givet ved $k = \sqrt{\frac{g \cdot m}{D}}$ for ganske enkelt at overskueliggøre differentialligningen. Ydermere gør indførelsen af k mig i stand til at løse differentialligningen.
Jeg foretager nu følgende smarte omskrivninger:

$m \cdot v' = -m \cdot g + D \cdot v^2$

$\Updownarrow$ (trækker (-m·g) fra på begge sider af lighedstegnet)

$m \cdot v' - (-m \cdot g) = D \cdot v^2$

$\Updownarrow$ (ophæver minusparentesen)

$m \cdot v' + m \cdot g = D \cdot v^2$

$\Updownarrow$ (dividerer med D på begge sider af lighedstegnet)

$\frac{m \cdot v'}{D} + \frac{g \cdot m}{D} = v^2$

$\Updownarrow$ (for at ophæve i 2. på v^2 tager jeg kvadratroden på begge sider af lighedstegnet)

$\sqrt{\frac{m \cdot v'}{D}} + \sqrt{\frac{g \cdot m}{D}} = v$

$\Updownarrow$ (størrelsen k indsættes i stedet for $\sqrt{\frac{g \cdot m}{D}}$.)

$\sqrt{\frac{m \cdot v'}{D}} + k = v$

$\Updownarrow$ (trækker k fra på begge sider af lighedstegnet)

$\sqrt{\frac{m \cdot v'}{D}} + k - k = v - k$

$\Updownarrow$

[14] [VI] s. 209

$\sqrt{\frac{m \cdot v'}{D}} = v - k$

$\Updownarrow$ (ophæver kvadratroden ved at sætte i 2. på begge sider af lighedstegnet)

$\frac{m \cdot v'}{D} = v^2 - k^2$

$\Updownarrow$ (ganger med D på begge sider af lighedstegnet)

$m \cdot v' = (v^2 - k^2) \cdot D$

$\Updownarrow$ (dividerer med m på begge sider af lighedstegnet)

$v' = \frac{(v^2 - k^2) \cdot D}{m} = \frac{D}{m} \cdot (v^2 - k^2)$

Jeg har nu differentialligningen

$$v' = \frac{D}{m} \cdot (v^2 - k^2),$$

som jeg ønsker at løse. For at løse denne må man havde kendskab til metoden separation af de variable. Denne sætning er bevist i afsnittet Bevis for separation af de variable.

Ovenstående differentialligning er på tilsvarende form som $\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)\ eller\ y' = h(x) \cdot g(y)$, der jo netop er grundstene i separation ad de variable.

Leddene i ovenstående differentialligning svarer til hhv. $\frac{D}{m} = h(x)$ og $(v^2 - k^2) = g(y)$.

Da det fremgår af mit bevis at $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx$ kan jeg omskrive min differentialligning til:

$$\int \left(\frac{1}{(v^2 - k^2)} \right) \cdot dv = \int \frac{D}{m} \cdot dt$$

For at bestemme integralet på venstre side er det til stor gavn først at opløse integralet i partialbrøker[15]. Det er nemlig væsentlig nemmere at foretage den efterfølgende integrationen, hvis $\frac{1}{(v^2 - k^2)}$ dekomponeres til partialbrøker.

Jeg faktorisere først nævneren ved at benytte kvadratsætningen $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$:

$$v^2 - k^2 = (v + k) \cdot (v - k)$$

dvs.

15 [IX] s. 42-43.

$$\frac{1}{v^2-k^2}=\frac{1}{(v+k)\cdot(v-k)}$$

Hele grundidéen med at omskrive til partialbrøker er at omskrive nævneren til en sum af to brøker. I mit tilfælde omskriver jeg nævneren v^2-k^2 til $v+k$ og $v-k$.

Derfor omskriver jeg på følgende snedige måde:

$$\frac{1}{v^2-k^2}=\frac{A}{v+k}+\frac{B}{v-k}=\frac{A(v-k)+B(v+k)}{v^2-k^2}$$

$$=\frac{(A\cdot v-A\cdot k)+(B\cdot v+B\cdot k)}{v^2-k^2}=\frac{A\cdot v-A\cdot k+B\cdot v+B\cdot k}{v^2-k^2}$$

$$=\frac{(A\cdot v+B\cdot v)-A\cdot k+B\cdot k}{v^2-k^2}=\frac{(A+B)\cdot v-A\cdot k+B\cdot k}{v^2-k^2}$$

Da

$$A+B=0\ \wedge\ -A\cdot k+B\cdot k=1$$

kan jeg beregne værdierne af hhv. A og B udtrykt ved k.

Jeg får da to ligninger med 3 ubekendte:

1. ligning: $-A\cdot k+B\cdot k=1$
2. ligning: $\underline{A+B=0}$

Jeg isolere B i ligning 2:

$$A+B=0\Leftrightarrow B=0-A=-A$$

Jeg indsætter ovenstående på B's plads i ligning 1 og isolere derefter A:

$$-A\cdot k+B\cdot k=1$$

$\Updownarrow$ (indsætter $B=-A$)

$$-A\cdot k-A\cdot k=1$$

$\Updownarrow$ (dividere med k på begge sider af lighedstegnet)

$$-A-A=\frac{1}{k}$$

$\Updownarrow$

$$2 \cdot -A = \frac{1}{k}$$

$\Updownarrow$ (dividere med -2 på begge sider af lighedstegnet for af isolere A)

$$\frac{-2A}{-2} = \frac{\frac{1}{k}}{-2}$$

$\Updownarrow$

$$A = \frac{-1}{2 \cdot k}$$

Jeg har nu fundet ud af at $B = -A$ og at $A = \frac{-1}{2 \cdot k}$. Det vil sige at:

$$B = -A = -\frac{-1}{2 \cdot k} = \frac{1}{2 \cdot k}$$

Jeg ved da at $A = \frac{-1}{2 \cdot k} \quad \wedge \quad B = \frac{1}{2 \cdot k}$.

Jeg indsætter nu A og B i $\frac{B}{v-k} + \frac{A}{v+k}$:

$$\frac{B}{v-k} + \frac{A}{v+k} = \frac{\frac{1}{2k}}{v-k} - \frac{\frac{1}{2k}}{v+k}$$

Brøken skrevet ud som en sum af partialbrøken er:

$$\frac{1}{v^2 - k^2} = \frac{\frac{1}{2k}}{v-k} - \frac{\frac{1}{2k}}{v+k}$$

Jeg kan nu integrere:

$$\int \left(\frac{1}{(v^2 - k^2)}\right) \cdot dv = \int \frac{D}{m} \cdot dt$$

Jeg starter med at integrere venstre side, som jeg lige har opløst til partialbrøker:

$$\int \left(\frac{1}{v^2 - k^2}\right) \cdot dv = \int \left(\frac{\frac{1}{2k}}{v-k} - \frac{\frac{1}{2k}}{v+k}\right) \cdot dv$$

Jeg regner nu videre på partialbrøkomskrivningen:

$$\int\left(\frac{\frac{1}{2k}}{v-k}-\frac{\frac{1}{2k}}{v+k}\right)\cdot dv$$

(sætter $\frac{1}{2k}$ ud foran brøkerne)

$$=\int\left(\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{v-k}-\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{v+k}\right)\cdot dv$$

$(\int\big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx)$

$$=\int\left(\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{v-k}\right)dv-\int\left(\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{v+k}\right)dv$$

(sætter $\frac{1}{2k}$ og $-\frac{1}{2k}$ ud foran integraletegnet da regnereglen $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$ for integration gælder)

$$=\frac{1}{2k}\int\left(\frac{1}{v-k}\right)dv-\frac{1}{2k}\int\left(\frac{1}{v+k}\right)dv$$

$\left(\int\frac{1}{x}dx=ln|x|\right)$

$$=\frac{1}{2k}\cdot\ln(|v-k|)-\frac{1}{2k}\cdot\ln\,(|v+k|)$$

(ganger $\ln(|v-k|)$ og $\ln\,(|v+k|)$ op i tælleren på brøkerne $\frac{1}{2k}$ og $-\frac{1}{2k}$)

$$=\frac{\ln(|v-k|)}{2k}-\frac{\ln(|v+k|)}{2k}$$

Jeg integrere nu højre side af $\int\left(\frac{1}{(v^2-k^2)}\right)\cdot dv=\int\frac{D}{m}\cdot dt$:

$\int\frac{D}{m}\cdot dt=\frac{D\cdot t}{m}+c,$

hvor c er en tilfældig konstant.

Dvs.

$$\frac{\ln(|v-k|)}{2k}-\frac{\ln(|v+k|)}{2k}=\frac{D\cdot t}{m}+c$$

$\Updownarrow$ (ganger med 2k på begge sider af lighedstegnet)

$$\ln(|v-k|)-\ln(|v+k|)=2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}+c$$

$\Updownarrow$ $\quad$ $(\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b))$

$$ln\left|\frac{v-k}{v+k}\right|=2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}+c$$

$\Updownarrow$ $\quad$ (ganger med e^x, da e^x og ln(x) ophæver hinanden)

$$e^{ln\left|\frac{v-k}{v+k}\right|}=e^{2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}+c}$$

$\Updownarrow$

$$\left|\frac{v-k}{v+k}\right|=e^{2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}+c}$$

Jeg antager nu at min genstand slippes til tidspunktet t=0. Ydermere beregner jeg kun løsningen, der går igennem punktet (v,t)=(0,0).

$$\left|\frac{v-k}{v+k}\right|=e^{2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}+c}$$

$\Updownarrow$ $\quad$ (ophæver numerisktegnet. Idet indholdet er negativt $\left(\frac{0-k}{0+k}=\frac{-k}{k}=-1\right)$ kommer der et minus).

$$-\frac{v-k}{v+k}=e^{2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}+c}$$

$\Updownarrow$ $\quad$ (jeg indsætter nu t=0 og v=0. Når jeg indsætter t=0 i $e^{2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}+c}$ giver hele udtrykket $2k\cdot\frac{D\cdot 0}{m}=0$ dvs. det giver e^c).

$$-\frac{0-k}{0+k}=\frac{--k}{k}=\frac{k}{k}=1=e^{2k\cdot\frac{D\cdot 0}{m}+c}=e^c$$

$\Updownarrow$ $\quad$ (jeg finder værdien af c. Et hvilket som helst tal x indsat i e^x=1 bliver nødvendigvis nødt til at være nul)

$e^c=1$ dvs. $c=0$

dvs.

$$-\frac{v-k}{v+k}=e^{2k\cdot\frac{D\cdot t}{m}}$$

Jeg isolerer v på følgende måde:

$$-\frac{v-k}{v+k} = e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$$

$\Updownarrow$ (ganger med -1 på begge sider af lighedstegnet)

$$-1 \cdot -\frac{v-k}{v+k} = -1 \cdot e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{v-k}{v+k} = -e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$$

$\Updownarrow$ (ganger med v+k på begge sider af lighedstegnet)

$$v-k = -e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} \cdot (v+k)$$

$\Updownarrow$ (ganger parentesen på højre side ud)

$$v-k = v \cdot -e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} + k \cdot -e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$$

$\Updownarrow$ (lægger k til på begge sider af lighedstegnet)

$$v = v \cdot -e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} + k \cdot -e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} + k$$

$\Updownarrow$ (lægger $v \cdot e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$ til på begge side af lighedstegnet)

$$v + v \cdot e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} = -k \cdot e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} + k$$

$\Updownarrow$ (sætter v uden for en parentes (på venstre side))

$$v \cdot \left(1 + e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}\right) = -k \cdot e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} + k$$

$\Updownarrow$ (sætter k uden for en parentes (på højre side))

$$v \cdot \left(1 + e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}\right) = k \cdot \left(1 \cdot -e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}\right)$$

$\Updownarrow$ (isolerer v ved at dividerer med $\left(1 + e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}\right)$)

$$v = k \cdot \left(\frac{1 - e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}{1 + e^{2k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}\right)$$

$\Updownarrow$ (ganger tæller og nævner i brøken med $e^{-k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}$ og skifter fortegn på k)

$$v = -k \cdot \left(\frac{e^{k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} - e^{-k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}{e^{k\cdot\frac{D}{m}\cdot t} + e^{-k\cdot\frac{D}{m}\cdot t}}\right)$$

⇕ (indsætter betydningen af k. $k = \sqrt{\frac{g \cdot m}{D}}$)

$$v = -\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t} - e^{-\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t}}{e^{\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t} + e^{-\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t}} \right)$$

Skrevet som en hyperbolsk funktion[16]: $\left(tanhx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t \right)$$

Ved at integrerer ovenstående hastighedsudtryk fremkommer stedfunktionen y(t):

$$v(t) = -\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t \right)$$

⇕ (integrere v(t))

$$\int -\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t \right) dt$$

⇕ (benytter regnereglen for ubestemte integraler om at $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$)

$$-\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot \int tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t \right) dt$$

⇕ (integrerer $tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t \right)$ ved at benytte følgende integrations reglen for tanh: $\int \tanh(a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot \ln\left(\cosh(a \cdot x)\right)$).

$$-\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}}} \cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t \right) \right) + y_0$$

⇕ (ganger $-\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}}$ og $\frac{1}{\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}}}$ dvs. $-\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}}$ ganges ind i tælleren på $\frac{1}{\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}}}$)

[16] [XVI] under afsnittet 'Standard algebraic expressions'.

$$\frac{-\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}}{\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}}\cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right)+y_0$$

$\Updownarrow$ (jeg opløser kvadratrødderne i $\frac{-\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}}{\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}}$ved at sætte dem i 2.)

$$\frac{-\frac{m\cdot g}{D}}{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right)+y_0$$

$\Updownarrow$

$$\frac{-m\cdot m\cdot g}{D\cdot D\cdot g}\cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right)+y_0$$

$\Updownarrow$

$$\frac{-m^2}{D^2}\cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right)+y_0$$

$\Updownarrow$ (tager kvadratroden af tæller og nævner i første brøk for at opløse i 2.)

$$-\frac{m}{D}\cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right)+y_0$$

Dvs.

$$y(t)=-\frac{m}{D}\cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D\cdot g}{m}}\cdot t\right)\right)+y_0,$$

hvilket er stedfunktionen, hvor s_0 angiver startpositionen for genstanden.

Grænseværdien er da:

$$v(t)\rightarrow\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}\,for\ t\rightarrow\infty$$

Det betyder set med fysikerens øjne at den hastighed hvormed en faldende genstand falder på et tidspunkt vil blive konstant. Denne konstante hastighed sætter ind i $\sqrt{\frac{m\cdot g}{D}}$, der er det øjeblik luftmodstanden bliver stor nok til at udligne tyngdefeltets påvirkning af genstanden. Som tidligere nævnt bliver accelerationen lig nul når de resulterende kræfter er nul.

Forsøg

I forbindelse med udarbejdelsen af denne opgave har jeg foretagen en række forsøg med frit fald med luftmodstand. Forsøgene skal anskueliggøre det frie fald i et tyngdefelt med luftmodstand. Jeg har valgt af medtage to forsøg i denne opgave. Et hvor luftmodstanden er betragtelig og et hvor luftmodstanden er af mindre betydning.

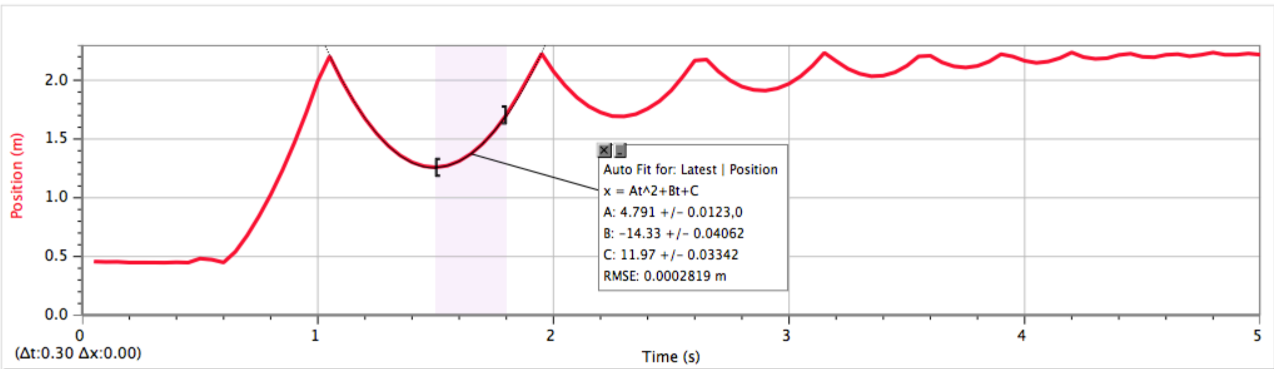
De to forsøg går i al sin enkelthed ud på undersøge et lodret kast med hhv. en volleyball og fem kæmpekaffefilter.

Jeg benyttede en Go!Motion ultralydssensor fra Vernier til at foretage målingerne. Disse målinger blev da indsat i computerprogrammet Logger Pro, der tegner hhv. en v(t)-graf og en y(t)-graf.

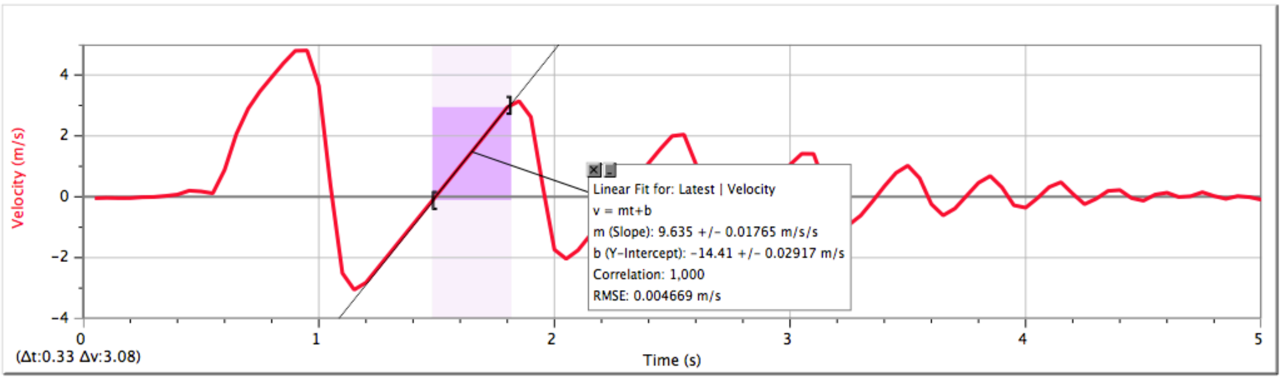
1. forsøg - volleyballen

Jeg placerede Go!Motion ultralydssensoren i loftet hvorefter jeg anbragte en volleyball et lille stykke under sensoren. Idet jeg gav slip på bolden målte ultralydssensoren hvor langt væk bolden var til de forskellige tider t. Disse data fremgik da i programmet Logger Pro. Ydermere blev følgende grafer tegnet:

y(t)-graf (kaldes ofte også s(t)-graf):



v(t)-graf:



Jeg benyttede herefter et udsnit af hvert datasæt til at passe en forskrift ind på kurven fra ultralydssensoren ved at bruge funktionen Curve Fit i Logger Pro.

Datasættet, som jeg udfører beregninger ud fra:

Tid [s]	**Position [m]**	**Hastighed** $\left[\frac{m}{s}\right]$
0	1,161	0,048
0,05	1,147	0,528
0,1	1,108	1,009
0,15	1,046	1,485
0,2	0,96	1,965
0,25	0,85	2,455
0,3	0,715	2,941

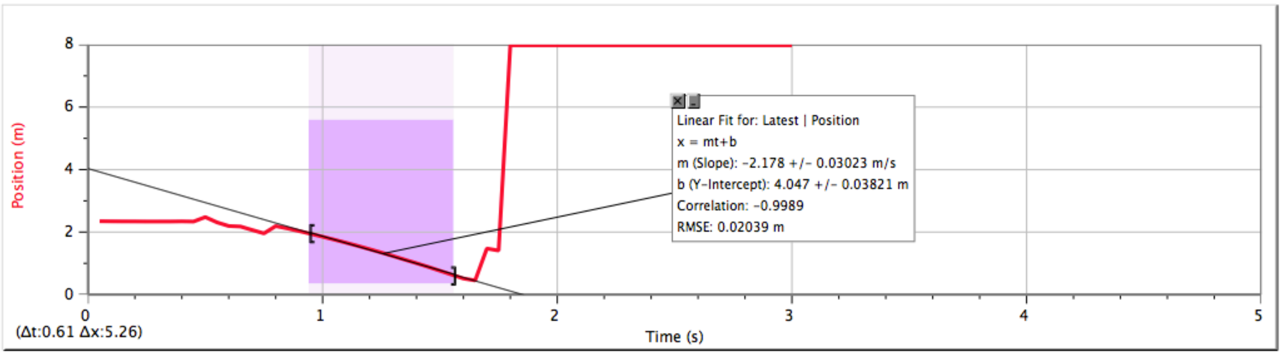
2. forsøg – kæmpekaffefiltrene

Jeg udførte forsøget på næsten sammen måde som forsøg 1. Jeg anvendte det samme udstyr, men jeg placerede dog ultralydssensoren på gulvet. Jeg placerede da 5 kæmpekaffefiltre lige over sensoren i lidt over 2 meters højde. Herefter slap jeg kaffefiltrene og ultralydssensoren målte da kaffefiltrenes højde til tiden t.

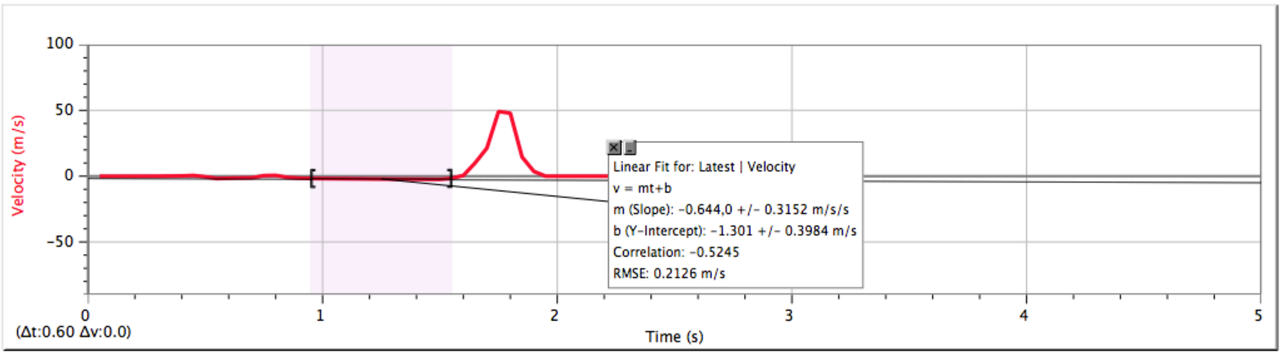
Igen fremgik datasættet af programmet Logger Pro.

Fælgende grafer blev tegnet:

y(t)-graf (kaldes ofte også s(t)-graf):



v(t)-graf:



Jeg benyttede igen et udsnit af hvert datasæt til at passe en forskrift ind på kurven fra ultralydssensoren ved at bruge funktionen Curve Fit i Logger Pro.

Datasættet, som jeg udfører beregninger ud fra:

Tid [s]	Position [m]	Hastighed $\left[\frac{m}{s}\right]$
0	1.943	-1.794
0.05	1.852	-1.860
0.1	1.757	-1.923
0.15	1.659	-1.989
0.2	1.558	-2.057
0.25	1.454	-2.129
0.3	1.346	-2.198
0.35	1.234	-2.261

0.4	1.118	-2.295
0.45	1.004	-2.335
0.5	0.886	-2.408
0.55	0.763	-2.426

Databehandling

Efterprøvning af vores teoretiske beregninger.

1. forsøg - volleyball

Volleybolden vejer 272,19 g
Den en diameter på 21cm.
c_w-værdien antager jeg er på 0,47.

$$Re = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta} = \frac{0{,}21\ m \cdot 1{,}204\ \frac{kg}{m^3} \cdot 2.894\frac{m}{s}}{1{,}8 \cdot 10^{-5} N \cdot \frac{s}{m^2}} = 40648.2$$

Da Reynoldstallet befinder sig i intervallet fra tusind til trehundredetusind (1000<Re<300000) kan man forudsætte at luftmodstanden er proportional med kvadratet på farten. Det betyder at det teoretiske v(t)-udtryk for volleyballen ser ud på følgende måde:

$$v(t) = -\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t\right) + v_0$$

Jeg bestemmer filtrenes hastighed til tiden t=0,30 s:

Den teoretisk beregnede værdi for hastigheden er:

$$v(0{,}30\,s) = -\sqrt{\frac{0{,}27219kg \cdot 9{,}82\,\frac{m}{s^2}}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}47 \cdot \pi \cdot (0{,}105m)^2}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}47 \cdot \pi \cdot (0{,}105m)^2 \cdot 9{,}82\,\frac{m}{s^2}}{0{,}27219kg}} \cdot 0{,}30\,s\right) + 0{,}048\,\frac{m}{s} = -2{,}867\,\frac{m}{s}$$

Ligesom før, sammenlignes der med en graf-værdi for datasættet:

$$v(0{,}30s) = -2{,}846\,\frac{m}{s}$$

Boldens y(t)-værdi kan bestemmes ved:

$$y(t) = -\frac{m}{D} \cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t\right)\right) + y_0$$

$$\Updownarrow$$

$$y(0{,}30\,s) = -\frac{0{,}27219kg}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}47 \cdot \pi \cdot (0{,}105m)^2} \cdot \ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}47 \cdot \pi \cdot (0{,}105m)^2 \cdot 9{,}82\,\frac{m}{s^2}}{0{,}27219kg}} \cdot 0{,}30\,s\right)\right) + 1{,}161\,m = 0{,}721\,m$$

Grafen fra datasættet giver følgende resultat:

$$y(0{,}30\,s) = 0{,}715\,m$$

For begge forsøg har jeg beregnet v(t)-værdier og y(t)-værdier tilhørende t-værdierne, der er inkluderet i datasættet. Disse beregninger er alle vedlagt som bilag.

2. forsøg – kæmpekaffefiltre

Datasætter går fra t=0 til t=0,55s.

10 kaffefiltre vejer $64{,}28\ g$. 5 kaffefiltre må altså veje: $\frac{64{,}28\ g}{2} = 32{,}14\ g$.

Jeg har antaget, at kaffefiltrene har en c_w-værdi på 0,5 (det har desværre ikke været muligt at finde den rigtige værdi).

Desuden har filtrene en diameter på 36 cm.

Filtrenes gennemsnitlige hastighed i faldet kan aflæses af hældningen på y(t)-grafen, altså $2{,}180\ \frac{m}{s}$.

Reynoldstallet for filtrene kan nu bestemmes:

$$Re = \frac{L \cdot \rho \cdot v}{\eta} = \frac{0{,}36\ m \cdot 1{,}204\ \frac{kg}{m^3} \cdot 2{,}180\ \frac{m}{s}}{1{,}8 \cdot 10^{-5}\ N \cdot \frac{s}{m^2}} = 52494.4$$

Da Reynoldstallet befinder sig i intervallet fra tusind til trehundredetusind (1000<Re<300000) kan man forudsætte at luftmodstanden er proportional med kvadratet på farten. Det betyder at det teoretiske v(t)-udtryk for kaffefiltrene ser ud på følgende måde:

$$v(t) = -\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t\right) + v_0$$

Jeg bestemmer filtrenes hastighed til tiden t=0,55s:

Den teoretisk beregnede værdi for hastigheden er:

$$v(0{,}55\ s) = -\sqrt{\frac{0{,}03214kg \cdot 9{,}82\frac{m}{s^2}}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}5 \cdot \pi \cdot (0{,}18m)^2}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}5 \cdot \pi \cdot (0{,}18m)^2 \cdot 9{,}82\frac{m}{s^2}}{0{,}03214kg}} \cdot 0{,}55s\right) = -2{,}995\frac{m}{s}$$

Til sammenligning har jeg fittet en graf på mine datapunkter fra forsøget, og får følgende:

$$v(0{,}65s) = -2{,}428\,\frac{m}{s}$$

Stedfunktionen for filtrene er nu også kendt, og følgende kan beregnes for tiden t=0,55s:

$$y(t) = -\frac{m}{D} \cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t\right)\right) + y_0$$

⇕

$$y(0{,}55s) = -\frac{0{,}03214\,kg}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}5 \cdot \pi \cdot (0{,}18\,m)^2} \cdot \ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot 1{,}204\,\frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}5 \cdot \pi \cdot (0{,}18\,m)^2 \cdot 9{,}82\,\frac{m}{s^2}}{0{,}03214\,kg}} \cdot 0{,}55\,s\right)\right) + 1{,}943\,m = 0{,}869\,m$$

Jeg har igen til sammenligning fittet en graf på mine datapunkter. Dataværdien for tiden t=0,55 er således:

$$y(0{,}55s) = 0{,}762\,m$$

Delkonklusion

Der er en procentvis afvigelse for volleyballen i højden til tiden t=0,30 sekund på 0,851 % fra den teoretiske beregning af højden til netop denne tid. Ydermere er der en procentvis afvigelse af hastigheden for volleybal-forsøget på 0,751 % fra den teoretiske udregning til tiden t=0,30 sekund. Disse meget små afvigelser kan skyldes at volleyballen ikke har en helt jævn overflade, hvilket kan give små målefejl fra ultralydssensorens side.

Lige så godt gik det dog ikke med kaffefilterforsøget. Afvigelserne er meget store. Den procentvise afvigelse i højden til tiden t=0,55 sekund er hele 12,33 % fra den teoretiske højde til samme tidspunkt. Værre bliver det med hastigheden. Hastigheden af kaffefilteret afviger 49,29 % fra den teoretiske hastighed til tiden t=0,55 sekund. Der er i dette forsøg også lidt flere fejlkilder en ved volleyball-forsøget, hvilket kan være forklaringen på de store afvigelser. Fejlkilderne kunne eksempelvis være at der ikke er kendskab til drag koefficientens størrelse for et kæmpekaffefilter så der er blevet i den teoretiske beregning regnet med en formmodstand, der svarer til en kegle. Det kan godt have en relativt stor betydning for resultatet. Ydermere svævede kaffefiltrene lidt hvilket gjorde det svært at afvikle hele faldet lige præcis over hovedet på ultralydssensoren. Og da det kan give store udsving i målingerne hvis den faldende genstand ikke befinder sig lige præcis over sensoren kan det også være medvirkende til de store afvigelser.

Konklusion

Man kan opstille en differentialligning ud fra fysiske argumenter heriblandt Newtons 2. lov.
$m \cdot v' = -m \cdot g + D \cdot v^2$
Det var da muligt at løse ligningen i de 2 tilfælde hvor modstanden er proportional med hhv. v og v^2. For at løse denne differentialligning måtte jeg bevise sætningen separation af de variable. Udledningerne gav en stedfunktion og en hastighedsfunktion i både tilfældet med v og v^2.
Differentialligningen giver for v hastighedsudtrykket $v_y = \left(v_0 \cdot sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k}$ og stedfunktionen $y(t) = -\frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{k} \cdot t + \frac{m}{k} \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \frac{m \cdot g}{k}\right)$
For v^2 er hastighedsudtrykket $v(t) = -\sqrt{\frac{m \cdot g}{D}} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t\right) + v_0$ og stedfunktionen

$y(t) = -\frac{m}{D} \cdot ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{D \cdot g}{m}} \cdot t\right)\right) + y_0.$

Mine to forsøg viste begge et reynoldstal der var højere end 1000 og derfor var modstanden i begge forsøg proportional med v^2. Forsøget med volleyballen gav et datasæt der var meget sammenligneligt med den teoretiske beregninger. De procentvise afvigelser var på under 1 %. Dog var kaffefilterforsøget mindre overensstemmende med den teoretiske beregning. Det skyldes nok fejlkilderne. Så jeg synes, at man på baggrund af denne opgave kan konkludere at de fremstillede udtryk forklarer et lodret kasts bevægelse rigtig fint.

Litteraturliste

[I] Albertsen Preben, Søren Andersen Hauge, Vibeke Axelsen, Busk Hanne og Nyvad Annette: ”Formelsamling Kemi A”, Kemiforlaget, 1. udgave 2. Oplag 2009.

[II] Andersen Erik Strandgaard, Jespersgaard Paul og Østergaard Ove Grønbæk: ”Databog fysik kemi”, F & K forlaget, 10. udgave 5. oplag 2005.

[III] Carstensen Jens og Frandsen Jesper: ”Matematik 2”, Forlaget systime a/s, 1985.

[IV] Dejgaard Jørgen og Schomacker Gert: ”Matematisk formelsamling stx A”, Matematiklærerforeningen, 2007.

[V] DEN STORE DANSKE Gyldendals åbne encyklopædi: ”Tyngdeacceleration”, http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Relativitetsteori_og_gravitation/tyngdeacceleration, 15/12 2011.

[VI] Elvekjær Finn og Benoni Torben: ”FysikABbogen2”, systime, 1. udgave 1. oplag 2006.

[VII] Elvekjær Finn og Nielsen Børge Degn: ”Fysikkens Verden 2 – Mekanik, bølger, atom- og kernefysik”, Gjellerup & Gad, 1989.

[VIII] Fysiknoter.dk:”Impuls og kraft”, http://fysiknoter.dk/Mekanik/Impuls%20og%20kraft.html, 17/12-11

[IX] Hebsgaard Thomas: ”Matematik højniveau 2”, TRIP, 1990.

[X] Jakobsen Kurt, Kragelund Jeppe, Rygaard Poulsen Jette og Schmidt Martin: ”Fysik i overblik – kompendium i fysik”, Fysikforlaget, 6. udgave 2007.

[XI] Jensen Werner: ”Trafikfysik”, Fysikforlaget, 1. udgave 1991.

[XII] Mølmer Klaus: “Newtons love”, http://infolink2003.elbo.dk/Naturvidenskab/dokumenter/doc/8454.pdf, 16/12-11

[XIII] Nielsen Louis: ”Isaac Newton – dynamikkens grundlægger og pionér i studiet af bevægelsens natur”, http://louis.rostra.dk/andreart/Isaac_Newton.htm, 16/12-11

[XIV] Schächter John Brix: ”Matematiske differentialligningsmodeller”, Vordingborg gymnasium.

[XV] Vestergaard Erik: ”Det skrå kast”, www.matematiksider.dk, 2009. (printet d. 29/11-11).

[XVI] Wikipedia: ”Hyperbolic function”, http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_function, 16/12 2011.

BILAG

Bilag 1

Samtlige løsninger til følgende 1. ordens differentialligninger bestemmes:

1. $y' = a \cdot y$
2. $y' = a \cdot y + b$

Jeg vil i de to efterfølgende beviser prøve at forklare hvordan man finder frem til samtlige løsninger af hhv. $y' = a \cdot y$ og $y' = a \cdot y + b$. Jeg skriver i parenteserne hvad jeg gør og evt. hvilke regler jeg benytter.

<u>Benævnelser:</u>

t angiver tiden i en passende enhed

f(t) angiver antal individer i en population (benytter også y).

$f'(t)$ angiver væksthastigheden til tidspunktet t.

Værktøjer jeg vil benytte til løsning af 1. ordens differentialligninger:

1. Regneregel for differentialkvotient for et produkt af to funktioner:

   $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ da er

   $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
2. Monotonisætning:

   Hvis $f'(x) = 0$ da er $f(x) = k$ (dvs. en vandret linje)
3. Potensregel:

   $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
4. Almindelige regneregler for løsning af ligninger.

Model 1

$f'(t) = a \cdot f(t)$ erstatter f (t) med y

$y' = a \cdot y$

<u>Sætning:</u>

Samtlige løsninger til differentialligningen

$y' = a \cdot y$ er

$y = c \cdot e^{a \cdot t}$

<u>Bevis for samtlige løsninger af $y' = a \cdot y$</u>

$y' = a \cdot y$

$\Updownarrow$ (regel 4 - ganger med $e^{-a \cdot t}$ på begge sider af lighedstegnet)

$y' \cdot e^{-a \cdot t} = a \cdot y \cdot e^{-a \cdot t}$

$\Updownarrow$ (flytter værdien af højre side overpå venstre side –regneregel 4)

$y' \cdot e^{-a \cdot t} - a \cdot y \cdot e^{-a \cdot t} = 0$

$\Updownarrow$ (ændre rækkefølgen, hvilket ikke har nogen betydning, da der er tale om et gangestykke)

$y' \cdot e^{-a \cdot t} - y \cdot a \cdot e^{-a \cdot t} = 0$

$\Updownarrow$ (reglen om at $(e^{-a\cdot t})' = a \cdot e^{-a\cdot t}$)

$y' \cdot e^{-a\cdot t} - y \cdot (e^{-a\cdot t})' = 0$

$\Updownarrow$ (produktreglen)

$(y \cdot e^{-a\cdot t})' = 0$

$\Updownarrow$ (regel 2 – monotonisætningen)

$y \cdot e^{-a\cdot t} = c$

$\Updownarrow$ (konstant c) (ganger med $e^{a\cdot t}$ på begge sider)

$\underbrace{y \cdot e^{-a\cdot t} \cdot e^{a\cdot t}}_{Potensregneregel} = c \cdot e^{a\cdot t}$

$\Updownarrow$

$y \cdot e^{0} = c \cdot e^{a\cdot t}$

$\Updownarrow$ (e^0=1)

$y \cdot 1 = c \cdot e^{a\cdot t}$

$\Updownarrow$

$y = c \cdot e^{a\cdot t}$ Eksponentiel model

Samtlige løsninger til $y' = a \cdot y$ er $y = c \cdot e^{a\cdot t}$.

Model 2

$y' = a \cdot y + b$

Sætning:

Samtlige løsninger til differentialligningen

$y' = a \cdot y + b$ er $y = c \cdot e^{a\cdot t} - \frac{b}{-a}$

Bevis for samtlige løsninger af $y' = a \cdot y + b$:

$y' = a \cdot y + b$

$\Updownarrow$ (sætter a uden for en parentes)

$y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$

$\Updownarrow$ (udnytter at $\left(y + \frac{b}{a}\right)' = y' + \left(\frac{b}{a}\right)' = y' + 0 = y'$)

$\left(y + \frac{b}{a}\right)' = a \cdot \left(y + \frac{b}{a}\right)$

$\Updownarrow$ (erstatter $y + \frac{b}{a}\ med\ z$)

$z' = a \cdot z$

$\Updownarrow$ (nu ligner ligningen model 2, og man kan derfor løse den på samme måde som model 2. Beviset er tidligere vist.)

$z = c \cdot e^{a \cdot t}$

$\Updownarrow$ (erstatter z med $y + \frac{b}{a}$)

$$y + \frac{b}{a} = c \cdot e^{a \cdot t}$$

$\Updownarrow$ (trækker $\frac{b}{a}$ fra på begge sider af lighedstegnet)

$y = c \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$

Samtlige løsninger til $y' = a \cdot y + b$ er $y = c \cdot e^{a \cdot t} - \frac{b}{a}$.