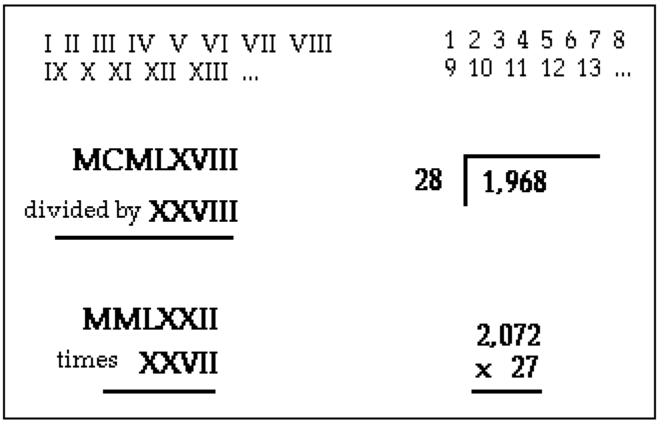
Studieretningsprojekt 2012

Arabertal og romertal

Vejledere:

Martin Schwebs Rasmussen (MA)

Birgit Poulsen (HI)



Udarbejdet af:

____

Alssundgymnasiet Sønderborg A13

1 normalside = 2400 anslag

Anslag: 49.815 = 20,75 normalsider

Abstract

This paper analyses the advantages and disadvantages of the Roman- and Arabic numerals through calculations with the 4 arithmetic operations. In the paper there are given several examples of calculations based on the material there have been found about the topic. Furthermore the paper explains how the structure of the society in North Italy was during the Middle Ages and the Renaissance. It analyses how the Arabic numerals were spread in North Italy, and which factors that made this spread possible. To examine the spread and the factors which made the spread possible, relevant sources such as Liber Abaci (English translation) and books written about the topic have been included. In the end of this paper, it evaluates the effect of the spread of Arabic numerals based on the previous sections in the paper. The paper concludes that the change in the structure of the society led to a new class - the merchants. From the new class Leonardo from Pisa (Fibonacci) came and he introduced the Arabic numerals in Europe. The paper also draws the conclusion that Fibonacci, the printing press and Luca Pacioli's book Summa had a huge influence on the spread of the Arabic numerals. In the end the paper concludes that the Arabic numerals have had a major impact on how the world is today.

Indhold

Indledning

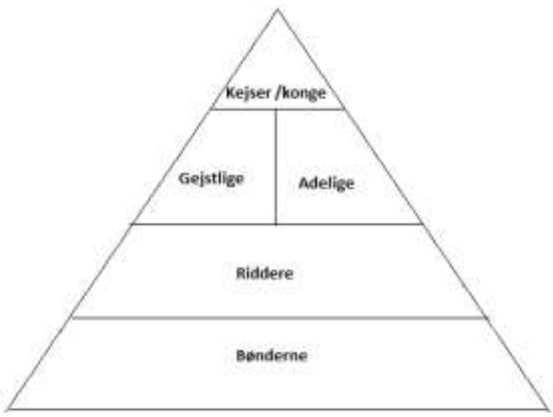
I denne opgave vil jeg skrive om arabertal og romertal. Jeg har altid været utrolig interesseret i historie generelt, men også renæssancen som periode. Det er i denne periode at Europa vågner, efter 'the dark age'. Det er her grundstenene til vores samfund i dag bliver lagt. En af disse sten er arabertallene, som afløste romertallene. I denne opgave vil redegøre for arabertal og romertal, gå ind og analyserer disse, samt finde fordele / ulemper. Det er dog også vigtigt at kende den historiske baggrund for, hvorfor arabertallene lige pludselig kom til Europa, derfor vil opgaven indeholde en redegørelse for samfundsstrukturen i middelalderen og renæssancen. Herefter vil jeg gå ind og analyserer, hvilke forudsætninger og hvordan arabertallene blev udbredt i Europa. Til sidst vil jeg vurdere betydningen af arabertallenes indførelse, på baggrund af analysen af romertal og arabertal, samt analysen af arabertallenes udbredelse i Europa.

Det har været svært at finde materiale omkring dette emne. Især om regning med romertal, derfor har jeg måtte bruge nogle links på internettet, som ikke er de mest troværdige, men det var det materiale, jeg kunne få fat i. I historie har det også været svært at finde nok materiale, derfor har jeg også brugt nogle links fra nettet i dette fag. Dog er de fleste af disse links skrevet af professorer i historie fra universiteter, så de burde være rimelig troværdige.

Samfundsstrukturen i Norditalien i middelalderen

Med Vestromerriges fald i år 476 indtrådte der en ny periode i Europa. Antikken blev afløst af middelalderen, som varede frem til år 1350[1]. Efter Vestromerriges fald skete der en opløsning af bykulturen, og denne blev erstattet med landbrugskulturen med fokus på selvforsyning. Norditalien var i perioden 476-774 underlagt forskellige styre bl.a. Byzans og langobarderne. I året 774 blev Norditalien erobret af Karl den Store, som indlemmede området i Frankerriget. Frankerriget var dog presset fra mange sider, derfor havde de brug for en stor stående hær for at forsvare sig selv. Det at holde en stor hær var dyrt og derudover var det svært at samle skatter ind pga. naturalieøkonomien. Den eneste måde kongen kunne få opkrævet og samlet afgifterne ind på var ved at låne jorden ud til herremænd, der i kongens navn opkrævede afgifterne af bønderne[2]. Det var dette, der gjorde Norditalien feudalt i middelalderen.

Det feudale samfund er bygget op på følgende måde:



Figur 1[3]

[1] B.Danielsen, Kim m.fl. 2005 s. 13
[2] Gade, Hans Kurt m.fl. 1994 s. 91
[3] Figuren er baseret på baggrund af Aldebert, Jacques 1992 s.32

Hvis vi ser på figur 1, kan man se at kongen / kejseren var den øverste instans i det feudale samfund. Hvis vi tager Frankerriget som eksempel, var Karl den Store konge, og senere blev han kronet til kejser af paven. Det at blive udnævnt til kejser, havde den fordel, at de gejstlige burde være loyale overfor kejseren, da han jo var udnævnt af selveste paven.

Hele ideen med det feudale system var at kongen/kejseren lånte jorden ud til enten biskopper eller adelige. De adelige som fik tildelt jorden, skulle til gengæld for jorden, aflægge en troskabsed overfor kongen/kejseren, samt stille med militær hjælp, hvis kongen/kejseren skulle i krig. De riddere, som herremændene stillede med var også til tider deres egne sønner, da det var utroligt dyrt at udruste en ridder og samtidig tog uddannelsen mange år[4]. Den jord de adelige fik tildelt lånte de så ud til bønderne, som blev fæstebønder. Fæstebønderne lånte jorden, hvorefter de dyrkede jorden og betalte afgifter til herremændene / de adelige. Fæstebønderne fik dog også beskyttelse fra de adelige. I Norditalien var der ofte plyndringer især langs kysterne, så i disse situationer beskyttede adelen fæstebønderne. Dette var også en af grundene til denne samfundsstruktur blev indført. Biskopperne fik også jord tildelt af kongen/kejseren. De skulle dog ikke stille med riddere, hvis kongen skulle i krig. I stedet ydede kirken andre tjenester end de adelige. De var de eneste med boglig uddannelse, derfor kunne de skrive breve, fører annaler[5] og være dommere i retssager[6]. Det feudale samfund er altså bygget på hersker-undersåt forhold, hvor båndet mellem de forskellige grupper, er det der teoretisk set binder samfundet sammen.

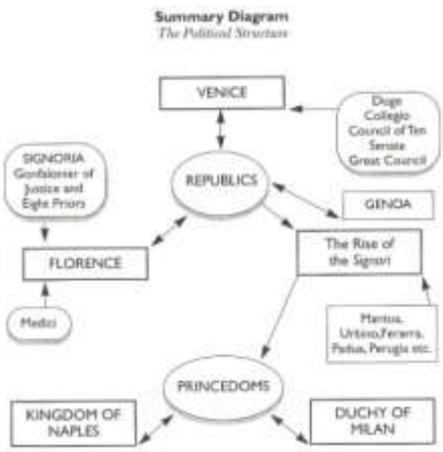
Dog adskilte Norditalien sig fra standardmodellen som er sat op for det feudale system. Efter Otto den Store havde samlet det tysk-romerske rige, som inkluderede Nord- og Mellemitalien i 951, gjorde han det tilladt for de adelige og biskopperne at lade deres len gå i arv. Dette svækkede kongens / kejserens magt, da han ikke længere kunne bestemme hvilke adelige/biskopper som skulle styre lenene. Denne samfundsstruktur gjorde sig gældende i Norditalien i middelalderen, med undtagelse af enkelte byer i slutningen af middelalderen.

[4] B. Danielsen, Kim 2011 s. 41
[5] Annaler er årbøger
[6] Gade, Hans Kurt m.fl. 1994 s. 91

Samfundsstrukturen i Norditalien i renæssancen

Renæssancen er perioden, der afløste middelalderen. Perioden starter omkring år 1350 og varer til ca. år 1600[7]. Vi starter dog et lidt andet sted, da det er vigtigt at vide, hvorfor samfundsstrukturen så ud som den gjorde i renæssancen.

Omkring år 1000 begyndte befolkningsvæksten i Europa igen at stige[8], samtidig var der blevet indført en række nye redskaber[9] som gjorde landbruget mere effektivt, hvilket førte til urbanisering. De adelige begyndte at efterspørge luksusvarer såsom krydderier, silke m.m. samtidig fik paven iværksat en del korstog. Udover kapitalindsprøjtning fik de norditalienske købmand også handelskontakter henover Middelhavet. Disse faktorer var med til at gøre byerne i Norditalien særdeles velhavende. På grund af denne økonomiske opblomstring kom der en ny gruppe i samfundet, købmændene. Da denne gruppe var stærke økonomisk set, ville de også have en andel af magten. Nogle af de norditalienske byer blev derfor selvstændige stater og gik sammen i den lombardiske liga[10]. På trods af angreb fra den tysk-romerske kejser, blev disse afvist. Dette betød at i 1200-tallet blev endnu flere selvstændige stater oprettet i Norditalien. Disse stater forskellige politiske styreformer. For de største og vigtigste byer vil jeg kortlægge deres politiske struktur med udgangspunkt i figur 2.



Figur 2[11]

[7] Gade, Hans Kurt 1994 s. 6
[8] Gade, Hans-Kurt 1994 s. 85
[9] Her tænkes på ploven bl.a.
[10] Sammenslutning af norditalienske byer
[11] Hole, Robert 1998 s.51

Vi starter med at se på den politiske struktur i republikken Venedig. Nederst har vi 'The Great Council' (oversat: Det store råd) som består af alle voksne mandlige aristokrater[12]. Dette råd havde omkring 2000 medlemmer i 1500-tallet bare for at sætte tal på hvor stort det var, men alligevel var det kun et par procent af befolkningen. Det store råd valgte 60 mand, som skulle sidde i senatet. Disse 60 mænd valgte så yderlige 60 mænd, som også skulle sidde i senatet. The Council of Ten, der bestod af 10 personer, blev også valgt af det store råd, dog skulle dem, der blev valgt ind i dette råd være senatorer i forvejen. Disse 10 mand stod for statssikkerhed og stabilitet. De havde også ret til at afsætte dogen[13], hvis han ikke opfyldte sine pligter, samt forvise folk, hvis de var til fare for staten. Man sad i disse råd i en periode af 1 år af gangen.

Næstsidst har vi "Collegio" som bestod af 26 mænd, der var valgt af dogen, 3 chefdommere, repræsentanter for de 6 bydele[14] samt en del aristokratiske familier. Dette råd mødtes hver dag, hvor de diskuterede problemer 'dag til dag problemer', som de fremsatte for dogen. Derudover bestemte de også, hvad der skulle tages til debat i Senatet. Til sidst har vi dogen, som blev valgt gennem en meget indviklet proces, der både inkluderede lodtrækning, % andel af stemmerne etc. Dogen havde for det meste ikke det sidste ord at skulle have sagt, men hvor magtfuld denne position var, kom an på om det var en stærk eller svag doge. Man blev valgt til denne post på livstid, dog kunne man godt afsættes[15]. For at få et bedre overblik over hvordan strukturen ser ud, henvises til figur 2.

I Firenze fungerede systemet helt anderledes, selvom det også var en republik. Byen blev styret af 'Signoria' - et råd bestående af 1 overhoved, 6 personer valgt fra de 7 rigeste familier, og 2 valgt fra de 14 næst rigeste familier. Der var også flere komiteer bl.a. The Ten hvis område var krig, mens fx The Eight stod for rigets sikkerhed. Herudover var der også 2 lovgivende råd som skulle godkende love. Fælles for disse råd var dog at de blev udnævnt af Signoria. Medlemmerne af Signoria blev valgt hver 2. måned ved lotteri, og dermed blev alle poster udskiftet hver 2 måned. Man kunne ej heller genvælges til disse poster de næste 3 år efter man havde haft en post i en af komiteerne.

[12] Med aristokrater menes overklassen
[13] Det formelle overhoved
[14] Venedig var inddelt i 6 bydele
[15] Hele afsnittet er baseret på Hole, Robert 1998 s. 38-51

Vi har nu set på 2 republikker, men i Norditalien var der dog stadig byer som var feudale fx Milano. Disse byer havde den samme samfundsstruktur som i middelalderen.

Samfundsstrukturen i renæssancen afhænger af hvor man kigger hen. Der var både feudale stater, men også republikker. Det skal dog understreges disse republikker ikke var demokratier, som vi forstår det i dag - det var stadig de rige som sad på magten. Selvom fx Firenze var en republik forhindrede det dog ikke enkelte familier at sidde på magten i mange år, fx Medici'erne. Den nye politiske struktur skyldes den nye stand - borgere/købmændene.

Romertal

Romertal blev brugt både i middelalderen og i dele af renæssancen til fx handel. Talsystemet er bygget op af bogstaver, som har en talværdi. Hvis vi starter med at se på hvilke bogstaver romertallene har for forskellige værdier:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Hvis romerne skulle bruge større tal en dem der er vist ovenfor satte de en streg over tallet. Dette betyder gange med 1000. Illustreret ved i denne boks:

$\bar{V}$	$\bar{X}$	$\bar{L}$	$\bar{C}$	$\bar{D}$	$\bar{M}$
5000	10.000	50.000	100.000	500.000	1.000.000

Talsystemet er ikke et positionstalsystem, men et additivt talsystem. Det betyder at tegnenes position i princippet er lige meget (og så alligevel ikke), fordi tegnene har den samme værdi uanset hvor de står henne. Derudover har et additivt talsystem ikke 0.

Der er et par regler[16] for hvordan romertallene må skrives, blandt disse er, at hvis et mindre tal står før et større tal trækker man tallets værdi fra det store tal fx IV. I er 1 og V er 5, derfor er IV lig 4. Modsat hvis det mindre tal står efter det større tal, så lægges tallet sammen, fx VI som er 6.

En anden regel er at der kun må stå 1 mindre tal foran et større tal. De tal der kan stå foran et større tal er: I,X og C. I må stå foran V, X må stå foran L, L må stå foran C, mens C må stå foran D.

[16] http://mathworld.wolfram.com/RomanNumerals.html

Derudover, som det sidste, må der ikke stå mere end 3 af det samme romertal efter hinanden. Dette er en lille introduktion til romertal. Nu vil vi gå videre med de 4 regnearter, addition, subtraktion, multiplikation og division.

Addition

Addition er den første regneart vi vil give os i kast med. Som det tidligere er pointeret har vi et additivt talsystem, hvilket betyder tallets værdi er summen af alle bogstavernes værdier. Dette skal vi have i baghovedet, når vi skal til at lægge tal sammen. For at forklare hvordan man gør, tager vi et regneeksempel:

$$DCCCLXXIII + CLXVIII$$

Da vi har et additivt talsystem, kan vi bare sætte tallene sammen for at få den samlede sum. Så vi får:

$$DCCCLXXIIICLXVIII$$

Nu har vi i princippet summen af de 2 tal, men vi skal dog lige have sorteret værdierne, så de står i rigtig rækkefølge. Det er bare at sætte de største talværdier forrest i ordnet rækkefølge. Så får vi:

$$DCCCCLLXXXVIIIIII$$

Nu er vi næsten færdige, men da der er en regel om 3 af de samme tal ikke må stå ved siden af hinanden, skal vi have substitueret nogle af tallene med andre. Vi starter fra bunden af, da det lettest. Fx har vi 6 ”I’er” som kan konverteres til 1 V, men vi har dog stadig et I i overskud. Så vi får:

$$= DCCCCLLXXXVIIIIII$$

$$= DCCCCLLXXXVVI$$

Vi har nu 2 V’er som kan substitueres med et X.

$$= DCCCCLLXXXXI$$

Samme princip nu med X’erne. Nu opdager vi dog et problem: Vi har 4 X’er men kan ikke konvertere dem til L, da der skal 5 til. Derfor bruger vi reglen om, at hvis et mindre tal står foran et større trækker man det. Så vores XXXX til XL.

$$= DCCCCCLLXLI$$

Nu skifter vi L'erne ud med C, og substituerer C med D.

$$= DDXLI$$

Sidste step er at skifte D'erne ud.

$$= MXLI$$

Vi har nu færdiggjort regnestykket.

Hvis vi skal gå ind og analysere processen, kan vi sige selve ideen med at lægge 2 tal sammen med romertal er simpel. Netop fordi vi har et additivt system, kan vi bare sætte tallene sammen, for så har vi i princippet summen af alle tallene, som giver det tal vi leder efter. Problemet med addition er at det er en længere proces, hvor vi skal forkorte en masse gange. Dog ville træning, forkorte den tid man skulle bruge, så dette regnestykke ville kunne gøres hurtigere. Romerne regnede dog ikke på denne måde, de brugte i stedet en abacus[17], selv ved addition[18]. Det vidner vel lidt om, hvor kompliceret dette talsystem trods alt er.

Problemet kommer, hvis vi skal arbejde med tal i størrelsen ordenen af millioner. Især hvis vi når over 4 millioner, for der spiller regelen ind, om vi ikke må have flere end 3 af det samme tal ved siden af hinanden. Det ville altså betyde, at vi ville blive nødt til at opfinde nogle nye tal, fx $|M|$ som kunne betyde 10 millioner i arabertal. Det giver så problemet, at vi konstant skulle opfinde nye symboler. Forstil dig vi er ude i nærheden af en googol[19], vi ville jo ende med ufattelige mange bogstaver, der har en bestemt værdi, og det ville være uoverskueligt at skulle regne med. Det ville kræve tabeller, der viser hvad fx 50 mio. ækvivalerer, hvad 5 mio. ækvivalerer, hvad 10 trillioner ækvivalerer.

Hvis vi i stedet forestiller os at reglen med et talværdi kun må stå 3 gange efter hinanden i træk bliver fjernet, kan vi godt beskrive større tal uden at skulle opfinde nye symboler for andre talværdier. Dette vil dog give et nyt problem, nemlig at vi får utrolig lange kæder af tal. Forstil dig at skulle skrive 56.103.987 i romertal. Ikke blot for den der skulle skrive det, men også for den som

[17] Et regneredskab som minder om en kugleramme
[18] Rantzau, Paul 1972 s. 75
[19] 10^{100} - altså et 1 tal med 100 nuller bagved.

skulle læse tallet. Hvis man så skal lægge 2 tal i den størrelsesorden sammen, ville han skulle udfylde et helt dokument med numre. Dette er blot en af de mange ulemper, der er ved romertallene.

Subtraktion

Subtraktion er når man trækker tal fra hinanden. Da vi har et additivt talsystem burde dette, ligesom addition være forholdsvis let, da vi bare kan strege tallene, fordi de har den samme værdi uanset hvor de står.

Et eksempel på det:

$$MMDCCCLVIII - MDCCLXXXVII$$

Det første vi gør at vi lader så mange M'er gå ud med hinanden som muligt. Dette samme for de andre bogstaver:

$$\cancel{M}M\cancel{DCC}C\cancel{LVII}I - \cancel{MDCCL}XXX\cancel{VII}$$

$$= MCI - XXX$$

Nu er vi nødt til at substituerer vores C med nogle L'er og X' hvis vi vil forkorte yderligere.

$$= MLXX\cancel{XXXI} - \cancel{XXX}$$

$$= MLXXI$$

Sidste step er at sortere og substituerer større tal med mindre. Dette har vi dog ikke brug for i dette tilfælde, men det kan være nødvendigt.

Ligesom addition er subtraktion utrolig simpelt med romertal i teorien. Selve metoden er ikke svær at lære. Det man skal huske er, hvilke mængder der ækvivalerer hvilke, men det er ej heller det sværeste at huske, specielt ikke når man har arbejdet med tallene. Dog vil kæmpe tal igen gøre det sværere, men hvis man bare holder tungen lige i munden, så går det.

Der er dog også andre ulemper, lad se på nogle af dem.

Fx hvis vi har regnestykket:

$$MCLXV - MMCLXV$$

$$= \cancel{MCLXV} - M\cancel{MCLXV}$$

$$= -M$$

Der findes ikke negative romertal, så dette regnestykke kunne man ikke beregne.+ og - symbolerne var ej heller blevet opfundet på dette tidspunkt. Det man ikke arbejder med negative tal begrænser matematisk også dette talsystemets formåen, fx til løsning af ligninger ville det aldrig gå at man kun godtog positive løsninger. Dog er der undtagelser fx i optimeringsopgaver, hvor man kun benytter den positive løsning, da den negative ikke giver mening. Hvad jeg vil frem til er, at det romerske talsystem ikke indeholder negative tal, hvilket vil være en ulempe når matematikken, når op på et højere 'niveau'.

Et andet problem er at romerne ikke kan udtrykke 0. Lad os tage et regneeksempel, hvor de to faktorer er lige store:

$$MCLXI - MCLXI$$

$$= \cancel{MCLXI} - \cancel{MCLXI}$$

$$= ?$$

Problemet er ikke, at vi ikke kan tolke dette tal. På dette tidspunkt kunne man jo godt forstå, at hvis jeg gav dig alt jeg har, så har jeg intet tilbage. Så man har sikkert været klar over, at dette regnestykke gav ingenting, men da der ikke er tegn for 0 i det romerske talsystem, kunne de ikke udtrykke det matematisk. Det ville dog også være mærkeligt hvis vi fik noget ud, for hvor du skulle det komme fra? Hvis vi gav 0 bogstavet N, så ville resultatet give N, men N er ikke repræsenteret i regnestykket: $MCLXI - MCLXI$. Så skulle man til at lave en ny regel, hvor N altid stod bagerst i et tal.

Opsummeret kan vi se det er forholdsvis let at trække tal fra hinanden, hvis vi har med romertal at gøre. Dog opstår der problemer, hvis vores resultat giver 0 eller bliver negativt.

Multiplikation

Multiplikation med romertal følger samme princip som med arabertal. Hvis vi har et regnestykke, skal vi blot gange alle faktorerne sammen. Dette kan vi gøre, da vi har et additivt talsystem. Vi regner jo summen af de forskellige faktorer ud, og kan derfor bare sætte dem sammen. Et lille eksempel på dette er:

$$V * XI = XXXXX + V = LV$$

Vi ganger V med X først hvilket giver 5 gange X, samt gange V med I, som giver V. For lettere at kunne regne med romertallene, kan vi opstille en tabel:

Multiplikation	I	V	X	L	C	D
I	I	V	X	L	C	D
V	V	XXV	L	CCL	D	MMD
X	X	L	C	D	M	$\bar{V}$
L	L	CCL	D	MMD	$\bar{V}$	$\bar{X}\bar{X}\bar{V}$
C	C	D	M	$\bar{V}$	$\bar{X}$	$\bar{L}$
D	D	MMD	$\bar{V}$	$\bar{X}\bar{X}\bar{V}$	$\bar{L}$	$\bar{C}\bar{C}\bar{L}$

Det er forholdsvis simpelt at lave dette skema, men det er utrolig brugbart, når man senere skal lave regnestykker med større tal. Hvis vi går ind og kigger på skemaet, kan vi se hvor simpelt systemet egentlig er bygget op, da det kun består af "5'ere og 10'ere" (1,5,10,50,100,500 osv.). Vi har baser på 2 og 5. Dette skal forstås sådan at der fx skal 5 I til at lave V, mens der kun skal 2 V'er til at lave X, og 5 X'er til at lave L osv.

Hvis vi tager et regneeksempel med større tal, kan vi se hvor nyttigt dette skema er. Det første vi gør, er at gange alle tallene sammen:

$$CLXVI * DCLXXVI = \left(\bar{L} + \bar{X} + \bar{V} + M + M + D + C\right) + (\bar{X}\bar{X}\bar{V} + \bar{V} + MMD + D + D + CCL + L) + (\bar{V} + M + D + C + C + L + L) + (MMD + D + CCL + L + L + XXV + V) + (D + C + L + +X + X + V + I)$$

Nu skal vi have sorteret dem:

$$= \bar{L}\bar{X}\bar{X}\bar{X}\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}MMMMMMMDDDDDDDDCCCCCCCCLLLLLLLXXXXXXVVVI$$

Herfra begynder vi at substituere tallene, vi starter med de mindste. Dog tager vi det i 2 dele, for at undgå fejl.

$$= \bar{L}\bar{X}\bar{X}\bar{X}\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}DDDCCCCCCLLXVI$$

Så skal de sidste lige substitueres:

$$= \bar{L}\bar{L}\bar{X}MMCCXVI$$

Vi er nu færdige, og er kommet frem til resultatet, som ses ovenfor.

Ved addition har jeg snakket om de problemer som det giver, når romertallene bliver for store. Dette kan man for alvor se ved dette regneeksempel. Vi havde regnestykket (med arabertal) $166 * 676$ som giver 112216 med arabertal. Dette tal er jo meget mere overskueligt end det vi først endte med, med romertallene:
$\bar{L}\bar{X}\bar{X}\bar{X}\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}MMMMMMMDDDDDDDDCCCCCCCCLLLLLLLXXXXXVVVI$

Dette må i den grad siges at være et voldsomt tal. Prøv at forstil dig, at vi havde et 8-9 cifret romertal multipliceret med 8-9 cifret romertal. Længden af de vi skulle forkorte ville blive utrolig langt. Egentlig er udregningen ikke specielt svær (når man først har tabellen), men alle de forskellige bogstaver kan godt forvirre. Det, at der er så mange bogstaver, medvirker også til det bliver lettere at lave fejl. Det skal ikke være nogen hemmelighed, at jeg regnede forkert 2 gange, før jeg kom frem til det rigtige. Det var simpelt hen umuligt for mig at spore fejlen, så jeg blev nødt til at starte forfra. Det er ikke bare kompliceret at multiplicere romertal, det tager også lang tid at regne ud. Det tager også lang tid når ens resultat skal forkortes, for man skal hele tiden tænke over, hvad skal substitueres til hvad? Det lyder måske simpelt nok, men der er jo en regel om et bogstav ikke må gentages mere end 3 gange i træk. Man kan altså ikke bare forkorte til hvad som helst[20].

[20] Multiplikationsafsnittet er skrevet baseret på http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/roman/

Division

Vi kan udføre division ved gentagne gange subtraktion[21]. Dette skal vi have i baghovedet, når vi udfører division med romertal. Derudover kan det nogle gange være en fordel at gange nævneren med en faktor, men mere om det senere i afsnittet.

Lad os tage et 'let' eksempel til at starte med:

$$\frac{LXXXVI}{XI}$$

Hvis vi ser på tælleren, kan vi se, vi allerede har XI, så vi kan starte med at strege denne ud, og notere 1. Så vi får:

$$\frac{LXXV}{XI} = I$$

Vi har nu problemet at der ikke er flere XI oppe i tælleren, derfor veksler vi nogle af værdierne i tælleren til X'er og I'er:

$$\frac{XXXXXXXIIIII}{XI} = I$$

Vi har 5 I'er og 7 X'er så vi kan strege XI i den øverste 5 gange og notere 5 mere. Så pt. ser vores regnestykke sådan ud:

$$\frac{XX}{XI} = VI$$

Vi har trukket XI fra 6 gange, men vi har endnu mulighed for at gør det en gang, hvis vi veksler et X.

$$\frac{XIIIII}{XI} = VI$$

Altså har vi trukket XI fra 7 gange, og der står nu tilbage:

$$\frac{IIII}{XI} = VII$$

[21] http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/roman/

Dette kan vi ikke dividere med hinanden, da nævneren er blevet højere end tælleren. Derfor må vores resultat blive til:

$$VII\ med\ en\ rest\ på\ IV$$

Division med et sværere stykke:

$$\frac{MMMDCCCLXXXVIII}{VI}$$

Som jeg skrev tidligere, kan det være nødvendigt at gange nævneren med en faktor, hvis denne er meget mindre end tælleren. For at gøre vores arbejde lettere, laver vi et regneskema, hvor vi har ganget forskellige faktorer ind på vores nævner. Det hjælper os til lettere, at kunne bestemme den størst mulige værdi, som kan trækkes fra.

Faktoren, der bliver ganget på nævneren	Faktoren ganget på nævneren
I	VI
V	XXX
X	LX
L	CCC
C	DC
D	MMM
M	$\bar{V}M$

Som vi kan se ved M bliver vores nævner for stor. Det skal forstås i den sammenhæng at vi jo foretager os subtraktioner. Vi kan med romertal ikke trække et højere tal fra et mindre. Derfor er det største tal vi kan trække fra MMM. Dette starter vi så med:

$$\frac{\cancel{MMM}DCCCLXXXVIII}{\cancel{MMM}} = D$$

Vi kan nu strege 3 M ud og notere et D til vores svar. Grunden til vi notere D er at det er den faktor vi har ganget på, derfor bliver det vi trækker fra vores nævner ganget med D. Jeg vil nu foretage et par yderligere subtraktioner med samme princip:

$$\frac{\cancel{DC}CCLXXXVIII}{\cancel{DC}} = DC$$

Da vi ikke har nok C, er vi nødt til at lave en omskrivning til L'er:

$$\frac{LL\cancel{LLLXXX}VIII}{\cancel{LX}} = DCXXX$$

Grunden til vi skriver X 3 gange, er at vi kan trække denne fra 3 gange:

$$\frac{\cancel{XXXXXXXXXX}VIII}{\cancel{XXX}} = DCXXXVVV$$

Til sidst med VI:

$$\frac{\cancel{VVVIII}}{\cancel{VI}} = DCXXXVVVIII$$

Altså får vi resultatet $DCXLVIII$ efter at have forkortet.

Den første ulempe ved division med romertal er, at vi er nødt til at lave tallet i tælleren om i næsten alle tilfælde. Det er besværligt at man ikke bare kan benytte tælleren, som den er. Det så vi også i det første regneeksempel, som jeg lavede. Selvom det var to relativt små tal var det ikke muligt at undgå at substituere tallene i tælleren.

Det største problem ligger vel nok i det resultat, som vi får i det første regnestykke, hvilket er $VII\ med\ en\ rest\ på\ IV$. Vi har altså fundet ud af at tallet kunne divideres med VI syv gange med en rest på IV. Denne rest er svær at fortolke, for hvor stort er dette tal: $\frac{IV}{XI}$? Matematikere ville ikke være tilfredse med, ikke at kunne udtrykke resultatet mere præcist, men det er altså ikke muligt med romertal. Man kan ikke udtrykke resultatet som en decimalbrøk. Decimalbrøker kan man nemlig ikke konstrueres med romertal. Romerne havde brøker[22] men dette brøksystem tog udgangspunkt i deres vægt/møntsystem. Dette var dog stadig besværligt, og man måtte ofte benytte tilnærmelser. Her er et klart eksempel på, at hvis man skulle løfte matematikken til et højere niveau, fx skulle bruge romertal til geometri etc. ville man være nødsaget til at bruge tilnærmelser, hvilket man fra et matematisk synspunkt ikke ville kunne acceptere.

Hvis vi ser på det andet regnestykke, kan vi se, det er favorabelt at gange en faktor på det tal, vi skal dividere med, da vi så får udført divisionen hurtigere. Dette burde ikke være nødvendigt at

[22] Rantzau, Paul, 1972 s.75

gøre for at udføre en division. Det er besværligt at skulle lave en multiplikationstabel hver gang man skal dividere et stort tal med et meget mindre tal. Derfor kan vi også konkludere at det er forholdsvis kompliceret og upraktisk at dividere med romertal[23].

Arabertal

Arabertal indgår i det talsystem vi bruger den i dag. Dette talsystem tager udgangspunkt i 10-talsystemet. I dette talsystem har vi 10 tal, nemlig fra 0-9. Dette kan også kaldes et positionstalsystem, hvor tallenes position har betydning for hvilken værdi tallet har. Vi har forskellige pladser som enere, tiere, hundrede osv. Det gælder dog også den anden vej, så vi har tiendedele, hundrededele osv. Det er essentielt at vide dette, før vi giver os i kast med de forskellige regnearter.

Addition

Addition er en regneart, hvor man lægger tal sammen. Vi starter med at vise hvordan man addere to tal i 10-talssystemet. Det vil være oplagt komme med et regneeksempel. For at gøre det lettere at lægge de to tal sammen skriver vi dem over hinanden, så det ene tals enere står over det andet tals enere, det samme med tiere, hundrede osv.

$$\begin{array}{r} 5786{,}7 \\ +\ 12467{,}07 \\ \hline \end{array}$$

Vi starter fra højre med at lægge hundrededelene sammen. Dette giver 7, så vi noterer 7. Næste step er at gøre det for tiendedelene, hvilket også giver 7 dette noterer vi også. Vi er nu kommet til et komma og noterer dette:

$$\begin{array}{r} 5786{,}7 \\ +\ 12467{,}07 \\ \hline ,77 \end{array}$$

Nu skal vi så regne enerne ud. Vi lægger de to tal sammen (6 og 7) hvilket giver 13, og vi noterer 3 har 1 i mente. Dette skal vi lægge til tierne, når vi regner dem ud. Samme metode ved resten af tallene også, og vi ender ud med:

[23] Afsnittet om division er skrevet med udgangspunkt i http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/roman/

$$\begin{array}{r} 5786{,}7 \\ +\ 12467{,}07 \\ \hline 18253{,}77 \end{array}$$

Vi er nu kommet igennem udregningen, hvilket var utrolig simpelt. Lige meget hvor store tal vi skal lægge sammen, kan vi bare stille dem op på samme måde, uden at ville være svært. Især det at vi kan lægge tiendedele, tiere, hundrede sammen hver for sig, gør det utroligt simpelt. Vi skal kun regne additionsstykker ud med tallene 0-9, hvilket er meget overskueligt. Det går også hurtigt, når man skal foretage beregningen, samtidig med chancen for at lave fejl er minimal. Det er en klar fordel at bruge arabertallene, når man skal lægge to tal sammen.

Subtraktion

Vi er nået til regnearten subtraktion. Her skal vi vise, hvordan man trækker to tal fra hinanden i 10-talssystemet. For igen at gøre det lettere stiller vi vores regnestykke op på samme måde som vi gjorde ved addition. Vi har regnestykket:

$$\begin{array}{r} 12095{,}62 \\ -\ 8464{,}79 \\ \hline \end{array}$$

Ligesom ved addition starter vi fra højre, men allerede ved hundrededelene støder vi ind i problemer. Vi skal trække 2 fra 9, men fordi 2 er mindre end 9, skal vi låne hos tiendedelene ved siden af, hvor vi så skal trække 1 fra. Så det ser sådan ud:

$$\begin{array}{r} 5\ 10 \\ 12095{,}62 \\ -\ 8464{,}79 \\ \hline \end{array}$$

Så på tiendedelenes plads har vi nu 5, mens vi har fået 2+10 ved hundrededelene. Nu kan vi så foretage beregningen, som giver 12-9 = 3, som vi kan notere. Samme fremgangsmetode bruger vi ved de andre tal, og så husker vi at sætte kommaet efter de 2 to første cifre fra højre.

Vi ender ud med:

$$\begin{array}{r} 12095{,}62 \\ -\ 8464{,}79 \\ \hline 3630{,}83 \end{array}$$

Man skal lige lære princippet med at låne fra den til venstre, når tallet er mindre end det, man skal trække fra med. Ellers er det lige så simpelt som ved addition. Igen kan man kun sige, at det er en fordel man kan stille enere, tiere osv. under hinanden. Dette kan ikke blive fremhævet nok, men det giver altså en overskuelighed, der gør det utroligt let at trække tal fra hinanden.

Hvis vi ser på subtraktionsstykker, hvor de to tal er lige store:

$$\begin{array}{r} 42 \\ -\ 42 \\ \hline 00 \end{array}$$

Vi kan se at 42 subtraheret fra 42 giver 0. Vi er i dette talsystem i stand til at sætte tal på ingenting vha. 0'ellet. Derudover har nullet den betydning at den fortæller os, der ikke er nogle af de pågældende tal. For at tage vores regneeksempel, kan vi se, vi har 0 enere og 0 tiere. Hvis vi så sætte et 1 tal foran de to nuller, så der stod 100, Men 0'erne stadig fortælle os vi har 0 tiere og 0 enere. 0 har altså en kæmpe betydning for notationen af tal i et positionssystem. Forstil dig, hvis vi ikke havde 0, hvordan skulle man så kende forskel på hundred og en i et positionstalsystem som arabertallene? Nullet markerer også overgangen mellem de positive tal og de negative tal.

Med arabertal kan vi også trække tal et mindre tal fra det større tal, såsom:

$$\begin{array}{r} 12 \\ -\ 32 \\ \hline -20 \end{array}$$

Det er endnu en af fordelene ved dette system, nemlig at vi kan regne med både negative og positive tal.

Multiplikation

Multiplikationen er en af de fire regnearter, som går ud på at finde summen af en række lige store addender[24]. Det er også vigtigt at holde sig for øje, at faktorernes orden ikke har nogen betydning, så om man skriver 7*3 eller 3*7 giver resultatet det samme. Uden at gå nærmere i detaljerne med alle reglerne[25] så bare lige for en god ordensskyld vil jeg sige liste nogle af de vigtigste ting op. Hvilket som helst tal man ganger med 0 giver nul. Da vi både har negative og positive tal, er det

[24] Rantzau, Paul, 1972 s. 146
[25] J.Bentley, Peter 2010 s. 21

godt lige at vide hvilket fortegn man får ud at det, hvis man ganger fx negative og positive tal sammen. Dette kan ses i boksen nedenfor.

Multipliceret	+	-
-	**-**	**+**
+	**+**	**-**

Hvis et negativt tal bliver ganget med et negativt tal, giver det et positivt tal. Et positiv tal og et negativ tal multipliceret, giver et negativt tal, mens 2 positive tal multipliceret, giver et positivt tal.

Vi vil nu tage et eksempel på et multiplikationsstykke:

$$166 * 676$$

Det første vi er gør, er at gange 6 (vores enere i dette tal) med enerne, tierne og hundrederne i det andet tal. Så først bliver det 6*6, hvilket giver 36. Vi noterer 6-tallet og har 3 in mente, da vi har 3 tiere i overskud. Samme princip med det næste tal, hvor vi ganger 6 med 7, hvilket giver 42. Vi skal dog huske at lægge de 3 tiere til, derfor noterer vi 5 og har 4 in mente. Til sidst multiplicerer vi 6 med 6, hvilket giver 36 og ligger 4 til. Da vi ikke har flere faktorer, vi skal gange med noterer vi 40. Det ser sådan ud grafisk:

```
        43
166 * 676 =  4056
```

Det samme gør vi for det næste 6 tal i rækken, og dernæst også for 1 tallet. Dog inden vi ganger med 6, skal vi huske at notere 0, før vi ganger den første faktor på. Grunden til dette er at vi er nået til tierne. Ved hundrederne skal vi så sætte 2 nuller på. Jeg har regnet stykket ud og her kan det ses, hvad der menes med at sætte nullerne bagpå:

```
        43
166 * 676 =  4056
            40560
            67600
```

Nu er vi nået til sidste step, som indebærer at vi lægger de udregnede tal sammen, for at få summen. Dette gøres ligesom vi har vist i additionsafsnittet. Vi ender altså ud med:

```
            43
166 * 676 =  4056
            40560
            67600
           ------
           112216
```

Ligesom ved addition og subtraktion gik det forholdsvis let. Man skal dog holde styr på at man ganger med enerne først, så tierne osv. En anden ting er at man skal huske det tal, man har i mente. Hvis vi skulle regne med store tal, kunne vi stille det op på samme måde. Selv hvis vi havde mange cifre, ville metoden stadig gøre regnestykket forholdsvis overskuelig. Nu hvor vi snakker store tal, er en anden af fordelene, at vores resultat ikke bliver specielt stort, på trods af, at vi ganger to 3-cifrede tal sammen i forhold til med romertal. Jeg har bevidst valgt dette multiplikationsstykke (166*676), for at kunne sammenligne det med hvordan vi fremgangsmåden ved romertallene. Her er endnu en af fordelene ved arabertallene, nemlig at tallet er meget mere overskueligt, end det romertal vi fik med multiplikationsstykket. Vi slipper også for at forkorte, da vi får resultatet med det samme, og ikke skal substituere.

Division

Division går ud på at finde ud af, hvor mange gange et tal går op i et andet. Ligesom ved multiplikation bliver to negative tal divideret med hinanden til et positivt tal. Et negativt og et positivt tal divideret med hinanden givet et negativt tal. To positive tal divideret med hinanden giver et positivt tal. Derudover kan man ikke dividere med 0. Disse regler[26] vil vi ikke komme nærmere ind på i denne opgave, men bare pointere at sådan er det.

Nu tager vi et regneeksempel med to tal:

$$\frac{86}{11}$$

Først finder vi ud af hvor mange gange 11 kan gå op i 8. Dette kan det ikke, derfor er vi nødt til at finde ud af hvor mange gange 11 kan gå op i 86. Dette er 7 gange (11*7 = 77), derfor skriver vi 7. Herefter trækker vi de 77 fra de 86 for at få en rest. Det lyder lidt kompliceret, men det kan ses her:

[26] Reglerne er fra Rantzau, Paul, 1972 s. 154

86/11 = 7
77
9

Vi har nu 9 stående nedenunder, men 11 går ikke op i det, derfor er vi nødt til at adde et nul til 9. Men hvis vi gør dette, skal vi sætte et komma. Herefter skal vi finde ud af hvor mange gange 11 går i 90, hvilket er 8 (8*11=88), derfor skriver vi 8 efter kommaet. Sidst skal vi så trække 88 fra de 90, hvilket giver 2. Dette kan man se grafisk her:

86/11 = 7,8
77
90
88
2

Vi gør det samme ved 2 tallet. Igen ser vi at 11 ikke går op i 2, derfor trækker vi igen et nul ned. Denne gang skal vi dog ikke sætte noget komma, det er kun første gang. 11 går en gang op i 20, derfor noterer vi 1. Sidst trækker vi 11 fra 20, og ser vi ender ud med 9.

86/11 = 7,81
77
90
88
20
11
9

Nu er vi kommet frem til at vores rest igen er 9. Derfor vil vores regnestykke gentage sig, så efter 1 kommer 8, efter 8 kommer 1. Sådan vil vi kunne skrive vores resultat. Derfor slutter vi her.

Nu er metoden blevet introduceret, og jeg vil lige vise endnu et eksempel, uden dog at gå i detaljer, da metoden er den samme. I dette stykke arbejder vi med større tal:

820125/456 = 1798,51
456
3641
3192
4492
4104
3885
3648
2370
2280
900
456
444

Det ser lidt voldsomt ud umiddelbart, men så kompliceret er det ikke. Det tager dog lidt tid, da den største opgave, er at finde ud af hvor mange gange 456 går op i det pågældende tal. For at finde ud af dette, må man prøve sig lidt frem. Det er nok en af ulemperne ved division med arabertal. Til gengæld kan vi ret præcist bestemme resultatet pga. decimaltallene. Det at man kan bestemme decimalbrøken er nyttige flere steder, fx banksystemet (renter). Vi slipper også for at substituere i tælleren og for at gange en faktor på vores nævner. Så på trods af de vanskeligheder der er, er det alt andet lige lettere at dividere med arabertal end romertal.

Udbredelsen af arabertal i Europa

Forudsætningerne for udbredelsen af arabertal hænger sammen med den økonomiske opblomstring, der skete i Norditalien i slutningen af middelalderen og i renæssancen. Befolkningstilvæksten steg, folk flyttede ind til byerne, handlen spirede pga. korstogene og der blev etableret handelsforbindelser henover middelhavet. For udbredelsen af arabertallene, kom en ting til at spille en helt centralrolle, nemlig den nye toneangivende klasse i samfundet, købmændene. Det er fra den samfundsklasse, at den første person, som havde en stor betydning udbredelsen af arabertal kom fra. Denne person er Leonardo fra Pisa, bedre kendt som Fibonacci.

Leonardo fra Pisa blev i født i år 1180 og døde i år 1250. I denne periode var Pisa en stor handelsby med en stor flåde. Leonardos far var købmand og blev senere leder af et af Pisas udenlandske handelskontorer i Algeriet. Han sørgede for, at sønnen fik lært købmandskab og visse regnetekniske færdigheder. En stor del af regnekundskaberne og den matematiske viden fik Fibonacci på rejser til bl.a. Sicilien, Grækenland og Egypten[27].

Efter at have tilegnet sig disse færdigheder, skrev han i året 1202 bogen: Liber Abaci (Bogen om beregninger). Det fremgår meget tydeligt af introduktionen til bogen, at han er meget betaget af arabertallene, som han nærmest lovpriser. Dette ser vi da han skriver:

“In it I presented a full instruction on numbers close to the method of the Indians[28], whose outstanding method I chose this science[29]”.

[27] Beck Danielsen, Kim m.fl. 2005 s. 169
[28] Indian’s method referer til arabertallene, da disse tal oprindelig kom fra Indien, derfor kaldes de også indernes tal.
[29] L.E., Sigler 2003 s. 20 (engelsk oversættelse af Liber Abaci)

Fibonacci var jo selv søn af en købmand, og som jeg tidl. har skrevet, så blev han oplært i købmandskab. Det at han allerede har en viden omkring dette, og så opdager arabertallene, hvorefter han siger de ”outstanding” tyder på, han er klar over at denne metode, kan gøre arbejdet for købmændene lettere. Endnu mere materiale, der kan underbygge denne påstand, findes også i teksten, hvor han tager fat i diverse problemer, som købmand kan støde ind i fx:

On the Same When the Merchandise Is Sought in Pounds.

Also 100 rolls are worth 40 pounds; how many rolls will I have for 2 pounds? Of these three numbers two are the price kind, namely the 40 pounds and the 2 pounds, and the other is the merchandise kind; the 40 and the 100 are written in one line; because of that it is said 100 rolls for 40 pounds; next the 2 pounds are written below the 40 pounds, and they will be numbers of the same kind, one under the other, as displayed in the second illustration; and you multiply the numbers which are diagonally opposite, namely the 100 and the 2; there will be 200 that you divide by the 40; the quotient will be 5 rolls of merchandise for the 2 pounds which you write below the 100 rolls.

pounds	rolls
40	100
2	$\boxed{5}$

Figur 3[30]

Dette er et problem, som man muligvis vil støde på, hvis man skal ud og købe varer. Fibonacci viser hvordan man løser problemet med arabertal. Det man skal bide mærke i er, at han også bruger illustrationer, til at gøre selve regnestykket lettere at forstå. Flere kapitler i Liber Abaci omhandler købmandsproblemer[31], herunder omregning af valuta, deling af profit mellem investorer m.m. hvilket også fremgår af indholdsfortegnelsen. Det at vi ser eksempler på, hvordan Fibonacci løser købmandsproblemer, giver os også en ide om, hvem målgruppen er for denne bog.

Det er klart at købmændene har været et mål at nå ud til for Fibonacci, ellers ville alle disse eksempler, som købmand kan have nytte af, nok ikke være medtaget. Det påpeges dog at Liber Abaci var dog ikke specielt let at få fat i, så det er nok begrænset, hvor mange købmænd i det 13. århundrede som fik fat i bogen. Bl.a. skriver Henry J. Perkinson:

[30] L.E., Sigler 2003 s. 133
[31] Se evt. L.E., Sigler 2003 s. 5

"But as Elezabeth Eistenstein points out, a hand-copied manuscript like the Liber Abaci was not not much easier to obtain than Ptolemy's Almagest during the thirteenth and fourteenth centuries[32]".

Dette kunne også tyde på bogen ikke har været særlig udbredt i Italien, men man skal ikke underminere denne bogs betydning for udbredelsen af arabertal. Det var den bog, som for alvor introducerede arabertallene til Europa, selvom disse havde svært ved at bryde igennem. Nogle af de faktorer som nævnes af historikere[33] er at romertallene var i brug i mange år, og det er svært at bryde med traditionerne[34]. Derudover så var der modstand mod talsystemet, fordi det var let at lave et 0 om til et 6 eller 9 tal, samt kunne et 1-tal let forveksles med et 7 tal. Dette var også medvirkende til at arabertallene blev forbudt i Firenze i 1299[35]. Derudover så var arabertallene også fra muslimske lande, hvilket har medført en hvis skepsis overfor tallene, da korstogene var "hellig krig mod Islam[36]".

På trods af modstanden, var det købmændene som var med til at udbrede arabertallene. Den nye klasse i samfundet, købmændene, ville gerne have at deres børn blev undervist i matematik og i særdeleshed handel, for at gøre disse klar til forretningslivet, når de engang blev store nok. I renæssancen, startede børnene i skole i primærskole, hvor de lærte at læse, skrive, blev præsenteret for sprog, art m.m.[37] Efter grundskolen, kunne man vælge 2 slags skoler, latinskoler og abacus skoler[38]. Vi vil primært have vores fokus på abacus skoler, som var de skoler, hvor købmænd primært sendte deres sønner hen. Dette beskriver meget godt, hvad man lærte i abacus skolerne:

"From 11, they moved to vernacular secondary schools, the abbaco schools, where they read books by the like of Aenop and Dante, and abridged vernacular versions of Fibonacci's Liber Abaci. Pin (1993, p. 168) and Grendler (2002, p.420) provide a list of the topics they covered including elementary accounting and how to solve business related problems, such as interest calculation, loans on discount, money, exchange, partnership diversions, measurements,

[32] J.Perkinson, Henry 1995 s.128
[33] Her snakkes om Bellos, Alex og Bernstein L. Peter
[34] L. Bernstein, Peter 1998 s.35
[35] L. Bernstein, Peter 1998 s.35
[36] Bellos, Alex 2010 s. 124
[37] A. Patrick, James 2007 s. 319
[38] http://eprints.mdx.ac.uk/3201/1/final_final_proof_Market_paper_050308.pdf s.117

currencies, weights and distance problems. The mathematics employed combined arithmetic (computing with numbers, especially decimals) algebra, geometry and what might be called ingenious reasoning[39]".

Det uddrag, som er blevet citeret, viser os noget meget vigtigt omkring udbredelsen af arabertal. Det viser os at man i disse abbaco skoler, lærte om arabiske tal, da Liber Abaci kun behandler arabertal. Derudover ser vi også at de lærte matematik, som inkluderede decimaler. Dette kan kun gøres vha. arabertal, og derfor må vi kunne konkludere, at de 1200 unge[40] som gik på abacus skolerne i Firenze, må have haft kendskab og forståelse for arabertallene. Det skal dog også lige siges, at de også lærte at regne med romertal med redskabet abacus[41]. Det var dette redskab, de benyttede til at foretage deres udregninger indtil 1500-tallet[42]. Hvorfor man så ikke benyttede arabertal, vil være et relevant spørgsmål at stille sig selv, da det jo er tydeligt, at forudsætningerne er der. En af forklaringerne kan være, at det var meget svært at få fat i egne lærebøger før bogtrykkerkunsten slog igennem og det var tradition at bruge abacusen til at regne med.

Den opfindelse, der sørgede for at arabertallene for alvor kunne slå igennem var bogtrykkerkunsten. Nu kunne folk få eksemplarer af lærebøgerne selv, viden blev spredt meget hurtigere og dermed også arabertallene. Man var ikke tvunget til at huske al i hovedet, men kunne altid "slå op" i et værk. I år 1469 kom bogtrykkerkunsten til Venedig. Herunder ser vi en figur[43] som beskriver, antallet af printede bøger i Italien:

[39] http://eprints.mdx.ac.uk/3201/1/final_final_proof_Market_paper_050308.pdf s.118
[40] J.Perkinson, Henry 1995 s. 130
[41] Samme funktion som en kugleramme
[42] http://www.gutenberg.org/files/22599/22599-h/22599-h.htm

Table 1. *Sandal's estimates of editions printed before 1501*

	No. of editions	% of total
Venice	5,000	41.32
Rome	2,000	16.53
Milan	1,200	9.92
Florence	800	6.61
Bologna	650	5.37
Naples	300	2.48
Pavia	280	2.31
Brescia	260	2.15
Others	1,610	13.31
Total	12,100	100.00

Table 2. *Quondam's estimates of editions printed 1465–1600*
(percentages of total output)

	1465–1600	1465–1500	1501–25	1526–50	1551–75	1576–1600
Venice	52.4	42.7	48.9	73.7	61.6	40.7
Rome	11.4	15.0	16.8	7.8	4.3	13.8
Florence	8.7	7.7	8.0	5.2	8.8	12.3
Milan	5.1	9.0	8.8	1.9	2.6	3.1
Bologna	3.6	4.6	5.8	3.3	3.1	1.7
Brescia	2.0	3.0	0.7	0.7	3.3	1.6
Naples	1.7	1.8	1.2	1.3	1.6	2.5
Ferrara	1.7	1.2	0.9	0.7	1.6	3.3

Figur 4[44]

Det estimeres, at der omkring år 1500 var blevet printet 30.000 bøger[45] i hele verden. Hvis vi ser på figur 4, kan vi se de 12.100 bøger af de 30.000 bøger er printet i Italien alene. Det er over 1/3 del af verdens bøger, som blev printet i Italien. Derudover kan vi se at vi Venedig har taget fronten, når vi snakker om antal printet bøger, hvor de før år 1500 allerede havde printet 5000 bøger (hvilket er 1/6 af det der er blevet trykt i verden). Det er bemærkelsesværdigt at Venedig gennem perioden 1465-1600 er den by (stat), som trykker allerflest bøger.

Dette er specielt interessant, da Luca Pacioli udgav sit værk Summa[46] i Venedig i året 1494[47]. Værket opsummerer al den matematik, der tidl. er blevet skrevet, og et afsnit om det dobbelte bogholderisystem. Det dobbelte bogholderisystem er en måde at ordne ens regnskaber på, så man har kredit og debet[48] i hver sin kolonne, samt skriver ens regnskaber ned i flere bøger. Systemet er

[44] Richardson, Brian 1999 s.6
[45] A. Patrick, James 2007 s.323
[46] Indeholder dele af bl.a. Liber Abaci
[47] Statens regnskabsdirektorat 1995 s. 10
[48] Debet er udgifter, kredit er indtægter

praktisk for købmænd at bruge, da det gør det lettere at holde styr på regnskabet. Denne bog var den første trykte lærebog, som beskrev dette princip[49].

Bogholderisystemet hænger sammen med arabertallene, da dette system var meget lettere at benytte, hvis man brugte arabertallene. Derudover så har Luca Pacioli også en del af Fibonacci's bog med i sit værk[50], så det er logisk nok, at Luca skrev afsnittet om det dobbelte bogholderisystem med arabertallene i baghovedet. Her ser vi for alvor at arabertallene bliver koblet sammen det praktiske arbejde købmændene foretog sig. Det er også relevant, at undersøge hvor mange eksemplarer, som blev solgt, for at kunne sige noget om, hvilken indflydelse bogen fik.

"It is said that copies of SA[51] flew off the shelves of booksellers as merchants from all over Europe rushed to obtain a copy. While this was probably an exaggeration, SA sold steadily over a long a long period, presumably as merchants came to hear of its existence and appreciate its relevance to them[52]".

Selvom bøgerne nok ikke blevet revet af hylderne, så har Summa altså solgt godt over en længere periode. Det har desværre ikke været muligt, at finde ud af hvor mange eksemplarer, der blev solgt. Men indenfor 30 år blev Summa udgivet i 3 oplag, derfor har værket sandsynligvis haft en meget stor betydning for udbredelsen af det dobbelte bogholderisystem og arabertallene[53]. Denne påstand kan vi også bakke op med de tal, vi tidligere har set på i figur 4, hvor størstedelen af bøgerne, som blev printet i Italien kom fra Venedig, så der er en hvis sandsynlig for Summa også har solgt godt.

Altså er vi kommet frem til at forudsætninger for arabertallene kom til Europa hænger sammen med, at der var økonomisk vækst, da dette skabte en ny klasse i samfundet - købmændene. Det var en af disse købmandssønner som bragte arabertallene til Europa, nærmere bestemt Fibonacci. Der var dog mange forhindringer for udbredelsen af arabertallene såsom love der forbød dem, fordi man for let kunne ændre tallene til andre tal. Den nye samfundsklasse var også meget bevidste om menneskets individualitet, hvilket var med til at få dem til at sende deres børn i skole,

[49] Statens regnskabsdirektorat 1995 s. 3
[50] http://eprints.mdx.ac.uk/3201/1/final_final_proof_Market_paper_050308.pdf
[51] Forkortelse af Summa Arithmetica
[52] http://eprints.mdx.ac.uk/3201/1/final_final_proof_Market_paper_050308.pdf
[53] Statens regnskabsdirektorat 1995 s. 10

så disse kunne tilegne sig viden om regning, handel etc. på de såkaldte abacus skoler. Her fik eleverne viden omkring arabertal, men også romertal og de lærte hvordan man regnede på abacus'en. På trods af en forståelse for arabertallene, blev romertallene stadig benyttet indtil 1500-1600 tallet. Med opfindelsen af bogtrykkerkunsten samt Luca Pacioli værk Summa, som var delvist baseret på Liber Abaci af Fibonacci, fik man spredt det dobbelte bogholderisystem til hele Europa, og dermed også arabertallene.

Arabertallenes indflydelse

Hvis vi ser på middelalderen, vil jeg vurdere, at arabertallene ikke havde en specielt stor indflydelse. Godt nok blev arabertallene introduceret i middelalderen (Fibonaccis Liber Abaci 1202) men der var meget modstand, og ringe interesse for disse tal. For at underbygge dette, kan man se på loven fra 1299 fra Firenze, som forbyder arabertallene, hvilket er et tegn på hvor stor modstanden var imod arabertallene. Derudover var der stor modstand mod alt arabisk i middelalderen, da korstogene mod muslimerne også fandt sted i denne periode. Vi befinder jo os i det katolske Italien, hvor selveste paven havde erklæret krig mod de hedenske muslimer. Dog var arabertallene ikke uden betydning, da der pga. købmændene blev oprettet de såkaldte abacus skoler, hvor man lærte om regnskaber, at regne med romertal på en abacus, men også fik kendskab til arabertallene. Arabertallene havde dog ikke den store betydning for handlen, da der blev brugt romertal, og derfor må vi konkludere at arabertallenes betydning i middelalderen ikke var særlig stor.

I starten af renæssancen havde arabertallene heller ikke en særlig stor indflydelse. Det er de stort set de samme faktorer, som i middelalderen, der gør arabertallene ikke vinder indpas. Man skal helt frem til 1500-1600 tallet før arabertallene får en betydning i Norditalien. Det man kan sige kickstarter brugen af arabertallene, er bogtrykkerkunsten og det dobbelte bogholderi system. Det at bogtrykkerkunsten bliver opfundet, har en kæmpe betydning for udbredelsen af det dobbelte bogholderisystem og arabertallene. Vi har tidl. set på tal for, hvor mange bøger, der blev trykt i Venedig, som også var den by, Luca Pacioli udgav sit værk Summa i. Værket Summa indeholder ikke kun et afsnit om det dobbelte bogholderisystem, men også flere afsnit taget fra Liber Abaci. Det at bogen blev udgivet i 3 oplag indenfor 30 år, fortæller vist også meget godt, hvor populær den måtte have været. Det, det dobbelte bogholderisystem bringer, er overskuelighed i regnskaber. Men selve metoden kan ikke gøre det alene.

Vi har tidl. set på hvor svært det er at regne med romertal. Vi kan ikke beregne decimaler, får en rest tilbage, som er svær at tolke, hvilket ikke kan bruges i et regnskab/handel. Derfor benyttede man også abacus, hvor man var nødt til at lave tilnærmelser. Derudover er store tal utrolig svære at holde styr på med romertal, så regnskaberne ville blive kringlet. Derfor var det ikke optimalt at bruge romertallene i det dobbelte bogholderisystem, hvilket man nok også indser med udbredelsen af Summa (og arabertallene).

Her kommer arabertallene ind, som er med til at gøre det lettere, at finde ud af om et firma har overskud eller underskud, samt beregne et evt. over- og underskud. I denne opgave har vi selv set på hvor simpelt det er at regne med arabertal frem for romertal. Man kan stille et regnestykke op over hinanden, og så lægge enere, tiere osv. sammen uden at møde nogle problemer. Så bare det at skulle finde summen af nogle tal fra et regnskab vil være lettere med arabertal. Hvor vigtigt er det så at kunne gennemskue et regnskab? Det er svært at sige, men sikkert er det i hvert fald, at ideen om at drive virksomhed og forretning forudsætter, at man kan finde ud af, om man vinder eller taber[54].

Anvendelsen af arabertal kom også til at præge specielt 1600-tallet, da diverse stater blev kolonimagter. De store kompagnier var organiseret som aktieselskaber, dvs. sammenslutninger af købmænd, der alle var mere eller mindre knyttet til staten. Disse kompagnier kontrollerede hele den oversøiske handel og spillede desuden en afgørende rolle i skabelsen af de respektive landes kolonier[55]. Aktieselskaberne byggede jo på det dobbelte bogholderisystem, de benyttede det i hvert fald, og brugte derved også arabertallene.

Så hvis vi skal vurdere hvor stor en betydning arabertallene har haft, må vi konkludere, at de har haft en kæmpe betydning i slutningen af renæssancen, men også for hele historien frem til i dag. Man kan måske påstå at menneskeheden stadig ville leve på håndværksstadiet, hvis ikke den det dobbelte bogholderisystem var opstået [56] . Den sætning opsummerer meget godt

[54] Engelhardt, Robin 2007 m.fl. s. 84
[55] Statens regnskabsdirektorat 1995 s. 13

bogholderisystemet betydning, men dette system var jo ikke nær så effektivt, hvis ikke man havde brugt arabertallene. Derfor må vi også vurdere indførelsen af arabertallene til, at have haft stor indflydelse på hvordan verden er i dag.

Konklusion

Med opløsningen af romerriget i året 476, blev antikken afløst af middelalderen. Middelalderens samfundsstruktur var feudal, hvilket vil sige, kongen lånte jorden ud til adelige og biskopper. Til gengæld skulle de adelige stille med riddere, hvis kongen skulle i krig. De gejstlige tog sig af andre opgaver såsom at skrive årbøger med mere. I løbet af det 11. århundrede begyndte befolkningsvæksten igen at stige, nye opfindelser indenfor landbruget betød, det blev lettere at dyrke jorden, korstogene blev indledt og nye forbindelser henover middelhavet, var nogle af de faktorer, som var med til at en ny periode begyndte - renæssancen. Norditalien var der,hvor renæssancen startede, hvilket man også kan se på den politiske struktur. Den nye stand, der kom frem var købmændene / borgerne. Denne klasse ville have en del af magten, derfor blev visse byer i Norditalien selvstændige stater fx Firenze og Venedig var republikker. En af disse købmandssønner var Leonardo fra Pisa, også kendt som Fibonacci. Han skrev et værk Liber Abaci, som han udgav i året 1202, hvor han redegjorde, for de 4 regnearter med arabertallene. Udover ham, havde bogtrykkerkunsten og Luca Pacioli også en stor betydning for udbredelsen af arabertallene. Luca Paciolis bog Summa beskrev det dobbelte bogholderisystem, som gjorde det lettere for købmænd at holde styr på deres regnskaber, specielt hvis de brugte arabertal.

I denne opgave er vi også kommet frem til, det er meget lettere at regne med arabertal, end at regne med romertal. Fx skal vi hele tiden substituerer romertal med andre romertal for at foretage en udregning. Når vi fx dividerer med romertal ender vi ikke altid ud med et tal, men i stedet et tal og en rest. Denne rest er ikke særlig praktisk, især ikke i regnskaber. Ydermere så vi hvordan man regnede med arabertal, hvor nullet og decimalbrøken gjorde vi kunne udtrykke facit ret præcist. Det at det er så simpelt at regne med arabertal, har haft for en stor betydning for verdenshistorien. Fx i slutningen af renæssancen startede kolonitiden, mange af de kompagnier, som handlede med ressourcer var aktieselskaber, der benyttede det dobbelte bogholderisystem (og dermed også arabertallene). Kolonitiden er en stor del af verdens historie, og derfor har arabertallenes også haft en stor betydning for hvordan verden ser ud i dag.

Litteraturliste

Bøger:

A.Patrick, James: Renaissance and Reformation (Forlaget Marshall-Cavendish Corporation 2007)

Aldebert, Jacques m.fl.: Europæernes historie (Forlaget Systime 1992)

Beck Danielsen, Kim m.fl.: Renæssancen da mennesket kom i centrum (Forlaget Systime 2005)

Beck Danielsen, Kim m.fl.: Middelalderen, historie, religion, litteratur og kunst (Forlaget Systime 2011)

Bellos, Alex: Alex's adventures in Numberland (Forlaget Bloomsbury Publishing 2010)

Gade, Hans-Kurt m.fl.: Europas Vej (Forlaget Munksgaard 1994)

Hole, Robert: Renaissance Italy (Forlaget Hodder Murray 1998)

J.Bentley, Peter: Tallenes bog (Forlaget Rosenkilde 2010)

J.Perkinson, Henry: How Things Got Better: Speech, Writing, Printing and Cultural Change (Forlaget Greenwood publishing group 1995)

L.Bernstein, Peter: Against the Gods: The Remarkable Story of Risk (Forlaget John Wiley and Sons 1998)

L.E., Sigler: Liber Abaci (Forlaget Springer-Verlag 2003)

Rantzau, Paul: Alle Tiders Tal - regnekunstens hvem, hvad, hvor (Politikkens Forlag 1972)

Richardson, Brian: Printing, Writers and Readers in Renaissance Italy (Cambridge University Press 1999)

Statens regnskabsdirektorat: 500 års jubilæum for det dobbelte bogføringsprincip (Udgivet af Statens regnskabsdirektorat)

Links:

http://eprints.mdx.ac.uk/3201/1/final_final_proof_Market_paper_050308.pdf (besøgt den 20.12.2012)

http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/roman/ (besøgt den 20.12.2012)

http://mathworld.wolfram.com/RomanNumerals.html (besøgt den 20.12.2012)

http://www.gutenberg.org/files/22599/22599-h/22599-h.htm (besøgt den 20.12.2012)

Billeder (forside):

http://pages.uoregon.edu/moursund/Books/PS-Expertise/chapter-1.htm

http://architecturalintentions2012.wordpress.com/2012/10/13/week-six-luca-pacioli/