

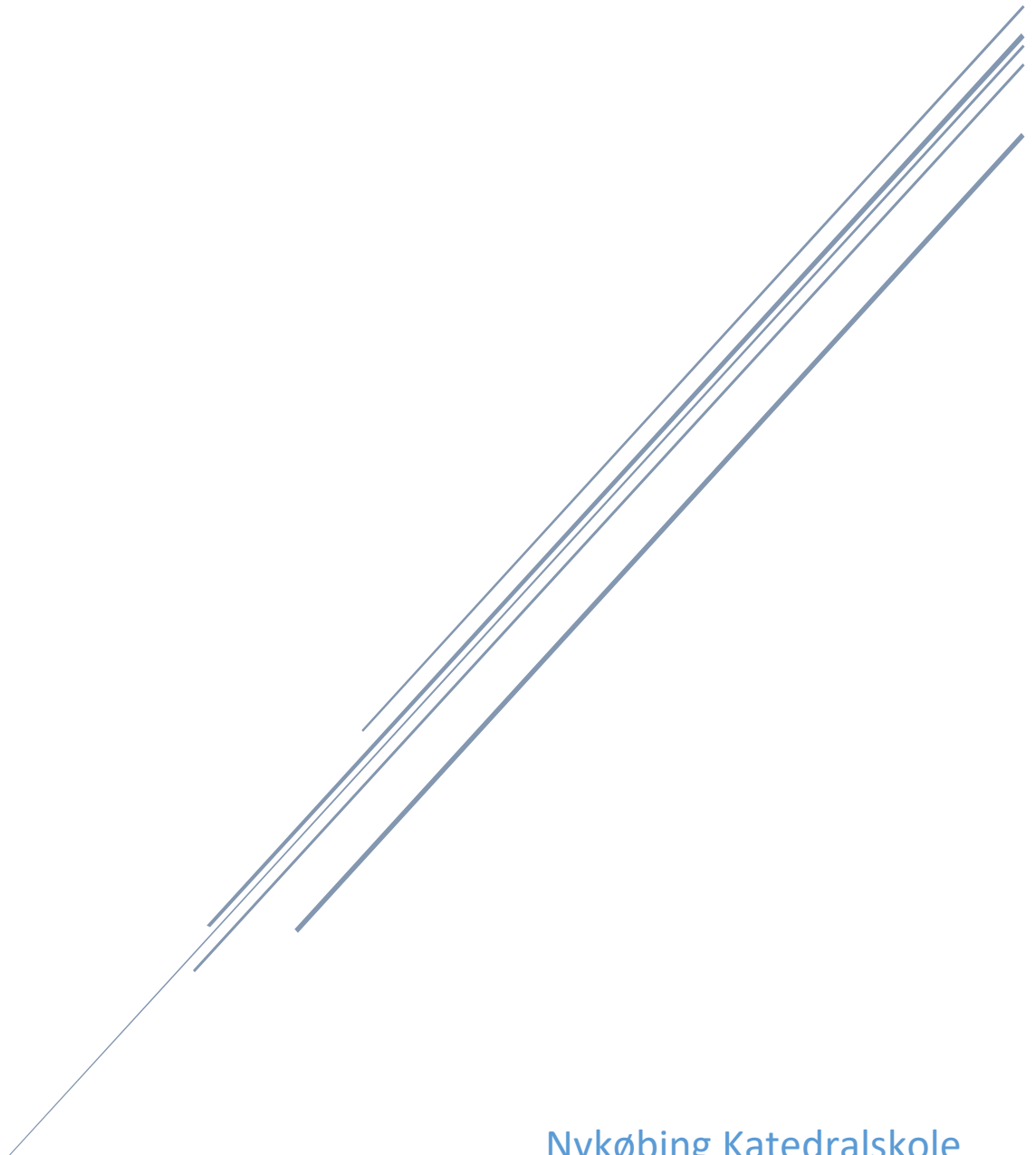
DJÆVLESPIL OG INERTIMOMENT

Studieretningsprojekt 2015

Christopher Kadow, 3.z – ElevID 3z 02

Fysik A – Anders Ejlersgård Christensen

Matematik A – Bo Vagner Hansen



Nykøbing Katedralskole
Matematik A og Fysik A

- **Abstract**

This study explains the principles behind moment of inertia and how it can be found for basic and complex objects using integral calculus taking a standpoint in the Riemann integral. This study is based on finding the moment of inertia for a standard toy-diabolo.

Further, the energy for a rigid object performing both translation and rotary movement is explained using König's equation to show, how the overall kinetic energy is the sum of the energy from the translation and the rotary movement.

Furthermore, several experiments has been performed to show, how the moment of inertia for any object can be found in a setup with a roll without friction based on acceleration, and also how the coefficient of friction for a diabolo can be found using Capstans equation. In addition, it is shown how it is possible to decide a body's moment of inertia by looking at the structure of the object.

Lastly, a simple diabolo trick is also included to understand how the friction between the cord and the diabolo is important to accomplish the tricks the skilled diabolo performers do.

The conclusive statement is, that the moment of inertia is a difficult and complex expression in physics, and that it is hard to find with the equipment we have in the upper secondary school. We were able to find an answer though, but in comparison to the theoretic value, we still had sources of error.

Indhold

• Indledning:	2
• Massemidtunkt:	2
• Energi for et legeme i bevægelse:	3
- Rotationsenergi:	4
- Königs sætning:	5
- Udlledning af acceleration ud fra den mekaniske energi i et rent rul:	8
• Riemann-integralet:	9
- Summer:	9
- Definitionen af Riemann-integralet:	11
- Monotone kontinuerte funktioner:	12
• Bestemmelse af et legemes inertimoment:	15
• Bestemmelse af inertimoment for diabolo:	17
- Inertimoment fundet eksperimentalt:	17
- Inertimoment fundet ved strukturen af diaboloen:	18
• Gnidningskoefficienten for diaboloen:	21
• Kræfter i et diabolo-trick	23
• Konklusion:	25
• Litteraturliste	26
• Bilag 1:	i
- Materialeliste:	i
- Forsøgsopstilling:	i
- Dataopsamling	ii
• Bilag 2:	iii
• Bilag 3	iv

Studieretningsprojekt 2015

- **Indledning:**

Når man ser et legeme roterer i dagligdagen tænker man ikke nærmere over det. Et hjul på en bil eller et svinghjul på et dampskib. De er der bare, men bag disse cirkulære legemer er der fysikere eller ingeniører, der har bestemt præcis, hvorfor de ser ud, som de gør. Alle legemer kan sættes i rotation, men legemets opbygning har stor betydning for, hvor let den udfører rotationen.

Inertimomentet beskriver præcis dette – nemlig hvor let det er at få et legeme til at rotere – eller mere det modsatte, hvor svært det er at få dette legeme til at stoppe med det. Man tænker ikke over det i sin hverdag, men det er utrolig vigtigt for opbygningen af mange ting – heriblandt et cykelhjul – men også legetøj som en diabolo eller en yoyo. Der er fysik i alt, og al bevægelse kan forklares.

I denne opgave bliver der kastet lys på begrebet inertimoment, og dennes brug i en diabolo. Der bliver også kigget på forskellige fysiske begreber, eksperimenter og matematiske metoder, der kan bruges til at forklare, hvorfor inertimomentet er, som det er – men også hvordan det har en vigtig indflydelse på det at måle energien i et legeme, der bevæger sig. For at forstå det mere komplekse, skal det centrale først på plads.

- **Massemidtpunkt:**

Massemidtpunktet kan være relevant at finde, idet det er et sted på et legeme, hvor det vil være i ligevægt i forhold til tyngdekraften uanset hvordan legemet drejes om en akse. Et eksempel kunne være en cirkelformet skive, hvor den er hængt op i et søm gennem centrum. Uanset hvordan denne cirkelformede skive drejes om sømmet, vil den være i ligevægt. På samme måde kan man finde sådan et punkt på et legeme, der ikke er symmetrisk opbygget.

Massemidtpunktet kan findes, hvis vi deler legemet op i en række massedele med masserne m_1, m_2 osv., som alle er så små, at de kan betragtes som partikler.¹

Massemidtpunktet af et system definerer vi ud fra koordinaterne (x_{cm}, y_{cm}) (cm står for "Center of Mass") på følgende måde:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 \dots}{m_1 + m_2 + m_3 \dots} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 \dots}{m_1 + m_2 + m_3 \dots} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

Vi tager altså summerne af alle punkternes masse samt deres koordinater på henholdsvis 1.- og 2.-aksen, og dividerer disse med den samlede masse for legemet, idet summen af alle punkternes masse på legemet må være den samlede masse.

Typisk lægger man koordinatsystemet i massemidtpunktet, hvis man kigger på en rotation af legemet, men det kan være meget relevant at kigge på stedsvektoren for massemidtpunktet, hvis nu et legeme udfører en translatorisk bevægelse, så koordinatsystemet lægges uden for legemet. Stedet for massemidtpunktet kan findes ved at kigge på stedvektorerne for alle de små punkter (hvilket også giver en x- og en y-værdi, tilmed også en z-værdi hvis man kigger 3-dimensionelt). Dette kan defineres på følgende måde:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 \dots} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

Altså minder denne definition meget om den anden, der bliver bare kigget på vektorer i stedet for.²

- **Energi for et legeme i bevægelse:**

Når vi nu har massemidtpunktet på plads er det essentielt også at kigge på, hvilken energi et legeme har, når den udfører en translatorisk bevægelse, hvor den samtidig roterer. Den mekaniske energi kan være vigtig for forståelsen for, hvilke ting der indvirker, når man skal måle

¹ Fogh, Esper og Knud Erik Nielsen: Stive Legemers Bevægelse. 2. udg. Silkeborg Bogtrykkeri, 1999. s. 11

² Young, Hugh D. og Roger A. Freedman: I: University Physics. 9. udg. Addison-Wesley Publishing Company, 1996. s. 246

på bevægelsen af et legeme. Her indføres rotationsenergien samt et dybere indblik på den samlede mekaniske energi for legemets bevægelse.

- Rotationsenergi:

Hvis man har et legeme der roterer med vinkelhastigheden ω gennem en fast akse, kan man ligesom før dele legemet op i ”i” massedele, hvor massedelenes hver for sig er så små, at man kan se bort fra deres udstrækning. Alle massedelenes har en afstand ind til midtpunktet O . Afstanden kaldes r_i . Idet legemet roterer omkring den faste akse, har alle massedelenes, også vinkelhastigheden ω , idet de alle udfører jævn cirkelbevægelse. Farten for massepunkterne kan derfor skrives som følgende:

$$v_i = r_i \cdot \omega$$

Man kan udregne den kinetiske energi for hver massedel, og denne vil være

$E_i = 0.5 \cdot m_i \cdot (r_i \cdot \omega)^2$. Vi er dog ikke interesseret i at udregne den kinetiske energi for hver massedel, men for hele legemet ved at finde summen af alle massedelenes kinetiske energi – denne kaldes rotationsenergien. Vi kan se, at 0.5 og ω vil være det samme i alle udregninger for massedelenes kinetiske energi, så de kan sættes uden for summen, så derfor kan den samlede rotationsenergi skrives $E_{rot} = 0.5 \cdot \omega^2 \cdot \sum m_i \cdot r_i^2$.

Størrelsen $\sum m_i \cdot r_i^2$ kaldes for inertimomentet I , og derfor kan rotationsenergien også skrives

$$E_{rot} = 0.5 \cdot I \cdot \omega^2$$

Ud fra den første ligning i afsnittet kan det også ses, at ω må være lig $\frac{v}{r}$

Hvis legemet ikke blot roterer, men samtidig udfører en translatorisk bevægelse, kan vi ud fra Königs sætning (se kapitlet ”Königs sætning”) se, at følgende må gælde:

$$E_{kin} = E_{rot} + E_{trans} = 0.5 \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} + 0.5 \cdot m \cdot v^2$$

Idet den samlede kinetiske energi er givet ved summen af energien fra bevægelsen masse-midtpunktet udfører og energien i masse-midtpunktsystemet.³

³ S Fogh, Esper og Knud Erik Nielsen: Stive Legemers Bevægelse. 2. udg. Silkeborg Bogtrykkeri, 1999. s. 20.

Vi vil nu kigge nærmere på udledningen af Königs sætning, så vi kan se hvorfor, at summen af rotations- og translationsenergien er den samlede kinetiske energi:

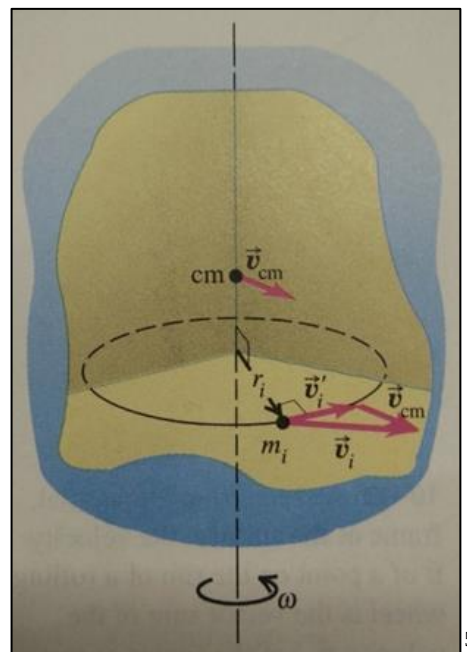
- **Königs sætning:**

I et massemidtpunktssystem gælder der Königs sætning, som siger, at den kinetiske energi i et partikelsystem er summen af den kinetiske energi fra den bevægelse, som partiklen udfører og den kinetiske energi fra den bevægelse, som massemidtpunktssystemet udfører (fx en rotation). Dette kan skrives som følgende:

$$T = T_C + 0.5 \cdot M \cdot v_C^2$$

Hvor T er den samlede kinetiske energi, C er massemidtpunktet (så T_C er den samlede kinetiske energi i massemidtpunktssystemet og v_C er massemidtpunktets fart). M er den samlede masse for hele partikelsystemet.⁴

Denne sætning kan udledes ved at kigge på et legeme, der bevæger sig i en translatorisk bevægelse mens den samtidig roterer i en jævn cirkelbevægelse, som det ses på illustrationen:



⁴ Mekanik. Udgivet af Gyldendal - Den Store Danske. Internetadresse: [http://www.denstoredanske.dk/It, teknik og naturvidenskab/Fysik/Klassisk mekanik og kvantefysik/mekanik](http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Klassisk_mekanik_og_kvantefysik/mekanik) - Besøgt d. 10.12.2015 (Internet)

⁵ Combined translation and rotation: Energy relations. Young, Hugh D. og Roger A. Freedman: I: University Physics. 9. udg. Addison-Wesley Publishing Company, 1996. side 301-303. (Afsnit i bog)

Vi kigger reelt på to koordinatsystemer. Et der ligger i midten af massemidtpunktet (så massemidtpunktet ligger i koordinaterne (0,0,0)) og et der ligger uden for legemet, vi kigger på. Det kan sammenlignes med en bil, der kører på jordoverfladen. Jorden har sit eget koordinatsystem fra centrum, mens bilen også har et koordinatsystem – hvor koordinatsystemet for bilen bevæger sig i forhold til koordinatsystemet for jorden. Derfor kan bevægelserne inde i bilen beskrives ud fra bilens koordinatsystem, og det der sker inde i bilen er derfor relativt til bilen.

Vi deler legemet op i et stort antal partikler med massen m_i og kigger på disse hver for sig. Disse partikler har afstanden r_i ind til massemidtpunktet og de roterer alle med jævn cirkelbevægelse. Derfor må partiklernes samlede hastighed $\mathbf{v}_i$ være summen af hastighedsvektoren for massemidtpunktets hastighed $\mathbf{v}_{cm}$ og hastighedsvektoren for partiklens rotation, der er relativ til massemidtpunktet, denne kaldes $\mathbf{v}_i'$.

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{cm}$$

Den kinetiske energi for hvert partikel må kunne skrives som $E_{kin,i} = 0.5 \cdot m_i \cdot \mathbf{v}_i^2$ men denne må også kunne skrives om som $E_{kin,i} = 0.5 \cdot m_i \cdot (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$. Bruger vi den førnævnte ligning for den samlede hastighed for funktionen $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_{cm}$, må følgende derfor kunne skrives:

$$\begin{aligned} E_{kin,i} &= 0.5 \cdot m_i (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i') \\ &= 0.5 \cdot m_i (\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_{cm} + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_i') \end{aligned}$$

Idet det vides fra matematikkens vektorregning, at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ kan følgende skrives:

$$E_{kin,i} = 0.5 \cdot m_i (v_{cm}^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_i' + v_i'^2)$$

Da vi ikke er interesseret i et enkelt partikels kinetiske energi, men det samlede legemes kinetiske energi, skal vi kigge på summen af alle de små partiklers kinetiske energi $\sum E_{kin,i}$. Ved at gange ind i parentes fås:

$$E_{kin} = \sum E_{kin,i} = \sum (0.5 \cdot m_i \cdot v_{cm}^2) + \sum (m_i \cdot \mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_i') + \sum (0.5 \cdot m_i \cdot v_i'^2)$$

Det kan ses, at første og andet led begge har udtryk, som vil være de samme for alle partiklerne. Derfor kan disse sættes uden for summerne:

$$E_{kin} = 0.5 \cdot \sum (m_i) \cdot v_{cm}^2 + \sum (m_i \cdot \mathbf{v}_i') \cdot \mathbf{v}_{cm} + \sum (0.5 \cdot m_i \cdot v_i'^2)$$

Det vides, at ledet $\sum(m_i \cdot v'_i)$ er lig 0, da det er den relative hastighed v'_i vi kigger på, og det kan forklares ved at kigge på definitionen af massemidtpunktet $\frac{\sum m_i \cdot r'_i}{\sum m_i}$. Vi ved, at vi har et relativt koordinatsystem, der bevæger sig, idet det ligger i massemidtpunktet på det legeme i bevægelse, vi arbejder med. Da massemidtpunktet derfor ligger i (0,0,0), kan vi sige, at $\frac{\sum m_i \cdot r'_i}{\sum m_i} = 0$. Ganger vi med summen af partiklernes masse på begge sider, får vi følgende udtryk: $\sum m_i \cdot r'_i = 0$. Differentierer vi det udtryk, vil vi få følgende:

$$\sum m_i \cdot v'_i = 0$$

Da $(r'_i)' = v'_i$

På denne måde, kan vi altså se, at det midterste led giver 0, så dette kan fjernes:

$$E_{kin} = 0.5 \cdot \sum (m_i) \cdot v_{cm}^2 + \sum (0.5 \cdot m_i \cdot v_i'^2)$$

Det vides, at $\sum(m_i)$ må være den samlede masse M for legemet, derfor må det første led give $0.5 \cdot M \cdot v_{cm}^2$, hvilket må være den kinetiske energi for den bevægelse, som legemet udfører. I det andet led kan ses, at det må være energien for rotation partiklerne laver, idet $v_i'^2 = \omega^2 \cdot r_i^2$, og da vi ved, at inertimomentet er givet ved $I = \sum m_i \cdot r_i^2$ kan det ses, at led nummer 2 må være $0.5 \cdot I \cdot \omega^2$. Derfor kan den samlede kinetiske energi skrives på følgende måde:

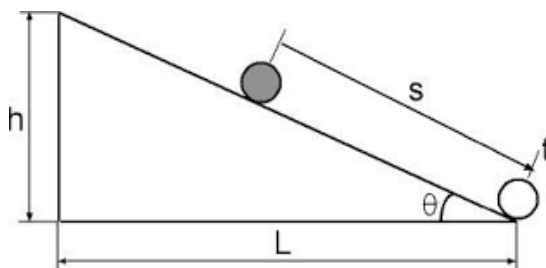
$$E_{kin} = 0.5 \cdot M \cdot v_{cm}^2 + 0.5 \cdot I_{cm} \cdot \omega^2$$

Vi har altså vist, at summen af den kinetiske energi for et legemes translatoriske bevægelse og rotationsenergien beskriver den samlede kinetiske energi for legemet, hvilket vi nævnte i forrige kapitel. Vi vil nu kigge på accelerationen for legemet, idet det kan være essentielt, hvis man vil lave forsøg med et legeme i bevægelse.⁶

⁶ Young, Hugh D. og Roger A. Freedman: I: University Physics. 9. udg. Addison-Wesley Publishing Company, 1996. s. 301

- **Udledning af acceleration ud fra den mekaniske energi i et rent rul:**

I et lukket system, som viser et rent rul, som ses på figuren⁷, vides der, at den mekaniske energi er konstant. Idet den mekaniske energi er summen af den kinetiske og den potentielle energi må $-\Delta E_{pot} = \Delta E_{kin}$ gælde.



Dog kan vi se bort fra $E_{kin,start}$, da denne må være 0, idet farten for kuglen i starten må være lig 0, da den vil ligge på toppen af det skrå plan.

Følgende må derfor kunne opsættes (koordinatsættet sættes, så der regnes positivt opad):

$$-m \cdot g \cdot (h - h_0) = 0.5 \cdot m \cdot v^2 + 0.5 \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2}$$

Hvor h_0 er højden i starten af rullet.

Vi vil gerne have længden s som en funktion af tiden. Ved brug af regler inden for trigonometrien, kan vi derfor sige, at $h(t) = s(t) \cdot \sin(\theta)$ må gælde som udtryk for højden (se evt. billede for reference).

Vi vil derfor kunne sætte følgende op:

$$m \cdot g \cdot h_0 - m \cdot g \cdot s(t) \cdot \sin(\theta) = 0.5 \cdot m \cdot v(t)^2 + 0.5 \cdot I \cdot \frac{v(t)^2}{r^2}$$

Hvor hastigheden også bliver som funktion af tiden.

Vi kan nu begynde at udlede accelerationen trin for trin:

$$2m \cdot g \cdot h_0 - 2m \cdot g \cdot s(t) \cdot \sin(\theta) = v(t)^2 \left(m + \frac{I}{r^2}\right)$$

Ved lidt matematisk udledning fås dette.

$$-2m \cdot g \cdot s'(t) \cdot \sin(\theta) = v'(t) \cdot 2v(t) \cdot \left(m + \frac{I}{r^2}\right)$$

Der differentieres på begge sider, så det første led på venstre side fjernes.

⁷ <http://janengelbrechtpedersen.dk/mobilesite/files/Fysikrapport%20Bev%C3%A6gelse%20p%C3%A5%20sk%C3%A5plan.pdf>. 09.12.2015. (Billede)

$$-\frac{m \cdot g \cdot s'(t) \cdot \sin(\theta)}{v(t) \cdot (m + \frac{I}{r^2})} = v'(t)$$

Der divideres med 2 på begge sider og $v'(t)$ isoleres

$$-\frac{m \cdot g \cdot \sin(\theta)}{(m + \frac{I}{r^2})} = a(t)$$

Idet $s'(t) = v(t)$ og $v'(t) = a(t)$ kan accelerationen udledes.

På denne måde kan accelerationen altså findes ud fra den mekaniske energi. Det kan ses ud fra ligningen, at acceleration ned ad det skrå plan med et rent rul er konstant, idet alle udtrykkene på venstre side i udledningen er konstante.

• Riemann-integralet:

Når vi kigger på inertimomentet for et objekt, kan det tit være meget relevant at bruge en uendelig fin inddeling af det legeme, man skal finde inertimomentet for. For at kigge på denne uendelig fine inddeling skal integralregning fra matematikken bruges. Vi vil her kigge på den matematiske baggrund for det integralbegreb, som Bernhard Riemann indførte i 1854.

- Summer:

Først forklares de centrale begreber. Vi ser på en begrænset funktion $f(x)$ i et lukket interval, $[a; b]$, hvor der er en endelig delmængde $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ hvor det forstås, at $a = x_0$ og $b = x_n$. Derudover skal det også opfylde, at $x_{j-1} < x_j$ for $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Det bemærkes da, at intervalinddelingerne ikke behøver at være lige lange, men bare skal opfylde ovenstående ulighed.⁸

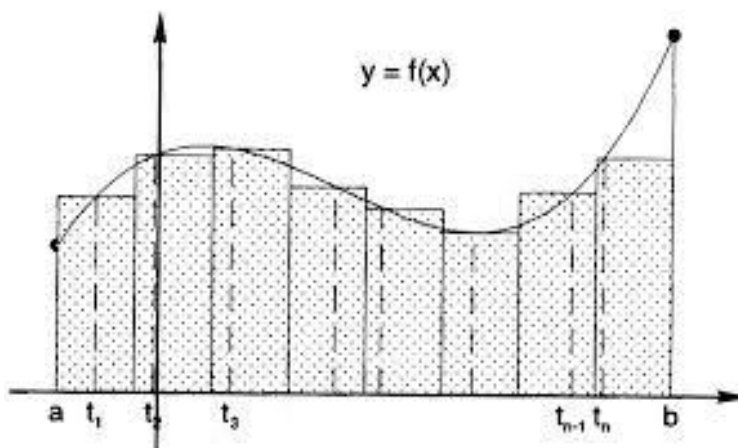
Vi lader $f(x)$ være en reel funktion defineret i intervallet $[a; b]$, og vi vælger en x -værdi, t , til hvert delinterval (se billedet). Vi kan derfor definere middelsummen $S(f)$ (middelsummen af funktionen f i et lukket interval) på følgende måde:

$$S(f) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

Hvor $j = 1, 2, 3 \dots n$

⁸ Grøn, Bjørn m.fl.: Hvad er matematik? A. 1. udg. Lindhardt og Ringhof, 2013.

9



Vi ser altså, at middelsummerne danner rektangler under kurven – og definitionen ligner også udregningen af rektanglers areal (*højde·grundlinje*) bare hvor højden her er udskiftet med y -værdier, der ikke nødvendigvis behøver at være positive.¹⁰

For at gøre det simpelt kan man lave nogle særlige inddelinger af delpunkterne i middelsommen. Vælger man hver gang t_j til at være i venstre side af delintervallet fås en venstresum, vælger man t_j til at være i højre side af delintervallet fås en højresum – sætter man t_j til at være lige i midten af delintervallerne fås en midtsum. Dette kan være meget nyttigt at gøre i visse tilfælde, og disse simple inddelinger bruges også senere i opgaven.¹¹

For $j = 1, 2, 3 \dots n$ indfører vi også y -værdierne $m_j(f)$ og $M_j(f)$, der defineres:

$M_j(f)$ er det mindste overtal til funktionen inde for delintervallerne – altså skal denne y -værdi ligge lige over funktionen. $m_j(f)$ er det mindste undertal til funktionen inde for delintervallerne – altså skal denne y -værdi ligge lige under funktionen.

Derfor kan følgende uligheder opskrives:

$$m_j(f) \leq f(x) \leq M_j(f) \text{ for } x_{j-1} \leq x \leq x_j.$$

⁹ HJ: *Arealer under grafer*. I: Noter, 03.2013, s. 7 (PDF)

¹⁰ Om Riemann-integralet. Noter til matematik 1. Udgivet af Aalborg Universitet. Internetadresse: <http://people.math.aau.dk/~matarne/09-mat2/riemann.pdf> - Besøgt d. 10.12.2015 (PDF) s. 2

¹¹ Grøn, Bjørn m.fl.: *Hvad er matematik?* A. 1. udg. Lindhardt og Ringhof, 2013. s. 138

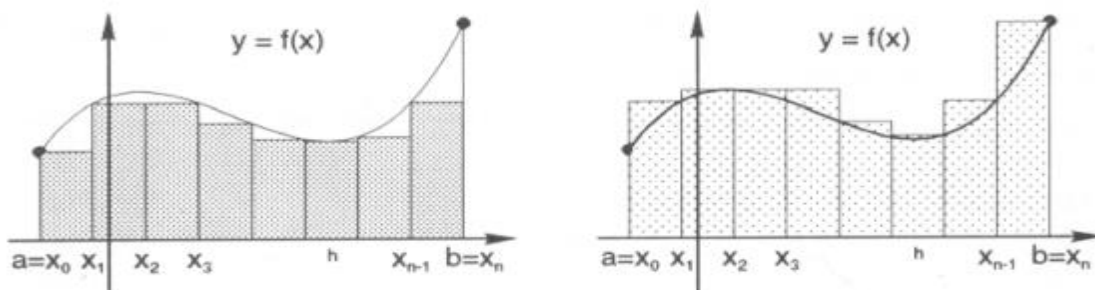
Ud fra disse to værdier kan begreberne undersum, L , og oversum, U , defineres:

$$L(f) = \sum_{j=1}^n m_j(f) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$U(f) = \sum_{j=1}^n M_j(f) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

Undersummen og oversummen kan visualiseres af billederne herunder (undersum til venstre og oversum til højre), hvor man kan se rektanglerne har toppunkt henholdsvis lige under og lige over kurven for $f(x)$, som det også kan ses ud fra definitionen af dem:

12



Det følger af vores definitioner af summerne, at følgende derfor må gælde:¹³

$$L(f) \leq S(f) \leq U(f)$$

Da vi nu har styr på summerne kan vi kigge på selve definitionen af Riemann-integralet:

- Definitionen af Riemann-integralet:

For at definere Riemann-integralet skal summerne bruges. Hvis undersummen, oversummen og middelsummen er defineret på de samme delintervaller, kan vi tage det største delinterval, g_n og lade dette gå mod nul. Gør vi dette, kan vi se ud fra definitionerne af summerne, at over- og undersummerne derfor også vil gå ind mod hinanden – idet de er defineret ud fra delintervallerne.

¹² HJ: Arealer under grafer. I: Noter, 03.2013, s. 3 (PDF)

¹³ Om Riemann-integralet. Noter til matematik 1. Udgivet af Aalborg Universitet. Internetadresse: <http://people.math.aau.dk/~matarne/09-mat2/riemann.pdf> - Besøgt d. 10.12.2015 (PDF) s. 2

Over- og undersummerne vil aldrig kunne ligge oveni hinanden, idet det ene ligger over funktionen og det andet ligger under, men idet intervallerne går mod nul, så vil de to summer også gå mod en grænseværdi, A .

Gælder dette for en funktion defineret på et lukket interval $[a;b]$, kan man sige, at integralet vil være grænseværdien. Derfor kan følgende skrives:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Og det er definitionen af en Riemann-integrabel funktion. Dette kan også ses, hvis der kigges på eksistensen af et Riemann-integral i en monoton kontinuert funktion.

- **Monotone kontinuerte funktioner:**

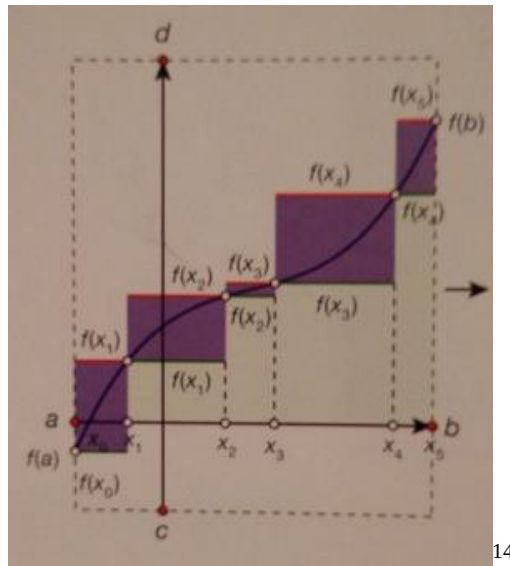
Vi vil vise, at der er en eksistens af integralet for monotone kontinuerte funktioner. Ved en monoton funktion, der er defineret på et lukket interval $[a;b]$ (hvilket gør den kontinuert i de fleste tilfælde) kan det vises, at funktionen er Riemann-integrabel. Dette gøres ved at lade det største delinterval, g_n , gå mod nul. Dette kan beskrives ved følgende sætning:

$$\sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(t_j) \cdot \Delta x_j \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

For $g_n \rightarrow 0$, hvor $g_n \geq x_j - x_{j-1}$ for alle j .

Sætning beskriver, at middelsummen konvergerer mod Riemann-integralet, når det største delinterval går mod 0.

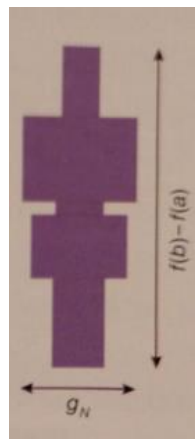
Dette kan bevises ved at vi antager, at vi har en funktion, $f(x)$, som er voksende i intervallet $[a;b]$. Hvis vi siger dette, kan vi sige, at $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Som før inddeles intervallet $[a;b]$ i n antal delintervaller, hvor vi ud fra de delintervaller laver en undersum, $U(f)$, og en oversum $L(f)$, som tidligere er defineret. Da vi siger, at funktionen er voksende i intervallet, kan vi også lave undersummen til en venstresum, og oversummen til en højresum (se "Definitionen af Riemann-integralet" for forklaring af højre- og venstresum). Dette visualiseres på følgende måde:



14

Hvor det ses, at oversummen, U , rammer funktionen i højre hjørne, og undersummen, L , rammer funktionen i venstre hjørne.

Vi er interesserede i det lilla område, da disse ligger imellem over- og undersummen, og derfor indeholder funktionen, derudover er vi interesserede i at lave længden af det største delinterval, g_n gå mod nul. Vi kan derfor vise de lilla områder på følgende måde:



15

Vi kan finde de lilla områder, ved at trække undersummen fra oversummen:

$$U - L = \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

- ¹⁴ Grøn, Bjørn m.fl.: Hvad er matematik? A. 1. udg. Lindhardt og Ringhof, 2013. s. 140

- ¹⁵ Grøn, Bjørn m.fl.: Hvad er matematik? A. 1. udg. Lindhardt og Ringhof, 2013. s. 140

Vi udleder:

$$U - L = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

Summerne bliver sammensat og $(x_j - x_{j-1})$ bliver sat uden for parentes.

$$\leq \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot g_n$$

Siden g_n beskriver det største delinterval, må $g_n \geq (x_j - x_{j-1})$ gælde. Derfor kan $(x_j - x_{j-1})$ erstattes, og et ulighedstegn indsættes.

$$\leq g_n \cdot \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1}))$$

g_n sættes uden for summen.

$$\leq g_n \cdot (f(b) - f(a))$$

Vi bruger, at $\sum (f(x_j) - f(x_{j-1}))$ må være det samme som $(f(b) - f(a))$ (se billede ovenover for reference),

Dette viser netop, at når det største delinterval går mod nul, så vil forskellen mellem under- og oversummen også gå mod nul, derfor er den voksende funktion Riemann-integrabel (bevist vil være det samme for aftagende funktioner). Den eneste måde en funktion kan være defineret på et interval og ikke være monoton, er hvis den springer lodret – er dette tilfældet vil samme fremgangsmåde kunne bruges.

Vi kan kigge på en vilkårlig middelsum, og for hvert interval $[x_{j-1}; x_j]$ vil følgende udtryk gælde:

$$f(x_{j-1}) \leq f(t_j) \leq f(x_j)$$

Fordi funktionen er voksende, herefter kan vi gange med delintervallernes længde og stadig beholde ulighedstegnene:

$$f(x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq f(t_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq f(x_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$

Da dette gælder vil følgende også gælde:

$$L \leq S \leq U$$

Vi ser altså både det før-definerede integral og middelsummen ligger mellem under- og oversummen (da vi før lavede intervallet mellem undersummen og oversummen gå mod nul).

Sætter vi forskellen mellem under- og oversummen til at gå mod nul (ved at sætte længden af delintervallerne til at gå mod nul) tvinges middelsummen derfor til at konvergere mod integralet. Derfor ser man følgende:

$$\sum_{j=1}^n f(t_j) \cdot (x_{j-1} - x_j) = \sum_{j=1}^n f(t_j) \cdot \Delta x_j \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Når $g_n \rightarrow 0$ ¹⁶

- **Bestemmelse af et legemes inertimoment:**

Idet opgavens omdrejningspunkt omhandler et forsøg med en diabolo, samt at finde inertimomentet for denne, er det vigtigt at undersøge, hvordan et inertimoment for et vilkårligt legeme findes. Først tages udgangspunkt i et simpelt legeme: En stang, der roterer om en akse gennem midten af stangen. For at finde inertimomentet bruges integralregning i form af Riemann-integralet.

Vi vil finde inertimomentet af en stang med længden l og massen m – inertimomentet vil vi finde med hensyn til en akse vinkelret gennem stangen – i dette tilfælde går vi ud fra, at stangen er homogen, og derfor vil den overalt have samme masse pr. længde m/l . Derfor kan det siges, at en massedel på stangen med længden Δx vil have massen $\Delta m = \Delta x \cdot m/l$. Vi tænker os, at vi deler stangen op i en masse stykker med længden Δx .

Man kan sige, at det stykke der befinder sig i afstanden x fra midtpunktet har inertimomentet:

$$\Delta I = \Delta m \cdot x^2$$

Idet x må beskrive radius.

Vi indsætter nu udtrykket for Δm og får:

$$\Delta I = \frac{m}{l} \cdot \Delta x \cdot x^2$$

Vil vi have det samlede inertimomentet for stangen, skal vi derfor tage summen af inertimomentet for alle de dele, vi har delt stangen op i:

$$I = \sum \frac{m}{l} \cdot \Delta x \cdot x^2 = \frac{m}{l} \cdot \sum (x^2 \cdot \Delta x)$$

Det vides ud fra definitionen af Riemann-integralet, at vi kan kigge på en uendelig fin inddeling, og lade Δx gå mod nul og derved få integralet:

$$I = \frac{m}{l} \cdot \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$$

Udregner vi dette fås inertimomentet $I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$

¹⁶ Grøn, Bjørn m.fl.: Hvad er matematik? A. 1. udg. Lindhardt og Ringhof, 2013. s. 140

Herefter tages udgangspunkt i en cirkulær skive, idet det er et lidt mere kompliceret legeme, hvilket giver en dybere forståelse omkring dét at finde et inertimoment.

Vi har en cirkulær skive med massen m og radius r , og inertimomentet vil findes ift. en akse vinkelret på skiven gennem centrum. Skiven inddeler vi i et stort antal tynde ringe, der alle har tykkelsen Δx . Alle dele af de tynde ringe har samme afstand fra akse, idet de er cirkulære, og derved bliver inertimomentet for en af ringene følgende:

$$\Delta I = \Delta m \cdot x^2$$

Hvor x vil være afstanden fra centrum til ringen, da akse går igennem centrum, og Δm vil være massen af ringen.

Hvis vi tænker os, at ringen er meget tynd, så kan vi skære den over og folde den ud til en rektangel, hvor længden af denne rektangel vil kunne beskrives som $2\pi \cdot x$, da det er formlen for en cirkels omkreds, og tykkelsen vil beskrives som Δx . Derfor kan det samlede areal af denne skrives som $2\pi \cdot x \cdot \Delta x$. Da skivens masse pr. areal må være massen delt med arealet af en cirkel, $\frac{m}{\pi \cdot r^2}$, så kan Δm skrives som følgende:

$$\Delta m = \frac{m}{\pi \cdot r^2} \cdot 2\pi \cdot x \cdot \Delta x$$

Derfor kan inertimomentet for ringen skrives som følgende:

$$\Delta I = \frac{2m}{r^2} \cdot x^3 \cdot \Delta x$$

Da dette blot er for en ring, må man kunne skrive skivens samlede inertimoment som summen af alle ringenes inertimoment:

$$I = \sum \Delta I = \frac{2m}{r^2} \cdot \sum x^3 \cdot \Delta x$$

Kigger vi på en uendelig fin inddeling af skiver, altså hvor vi lader tykkelsen af ringene Δx gå mod nul (hvor Δx også kan beskrives som delintervallerne for middelsommen af funktionen (se ”Monotone kontinuere funktioner”), så vil vi kunne lave det til et integral i intervallet $[0, r]$, idet funktionen x^3 vil være Riemann-integrabel:

$$I = \frac{2m}{r^2} \cdot \int_0^r x^3 dx = \frac{2m}{r^2} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot x^4 \right]_0^r = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

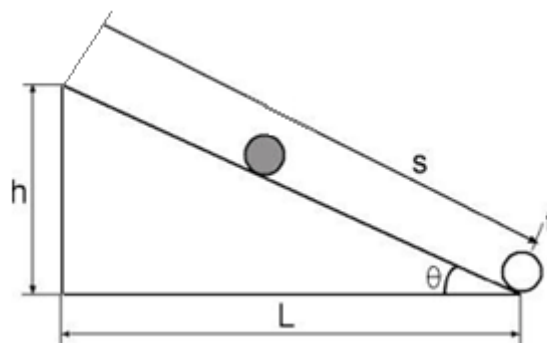
Inertimomentet for en cirkulær skive vil derfor være $\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$, som kan findes ved at kigge på en uendelig finddeling af en opdeling af legemet ved hjælp af integralregning.¹⁷

- **Bestemmelse af inertimoment for diabolo:**

Omdrejningspunktet er, at finde inertimomentet for en diabolo, og for at finde dette vil vi bruge to udgangspunkter – eksperimentalt og ved at kigge på symmetrien og massen af selve diaboloen.

- **Inertimoment fundet eksperimentalt:**

Ved at tage udgangspunkt i ligningen, hvor accelerationen er udledt ud fra den mekaniske energi, vil vi nu finde inertimomentet ved at lave en opsætning med et rent rul, hvor accelerationen a måles for at finde inertimomentet, idet massen m , længden s og højden h er målt. Vinklen θ kan findes ud fra længden og højden, idet $\sin(\theta) = \frac{\Delta h}{\Delta s} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\Delta h}{\Delta s}\right)$. Accelerationen måles vha. en afstandsmåler og programmet Logger Pro (se bilag 1 for uddybet forsøgsopstilling).



Før selve målingen af diaboloens acceleration kunne måles, var opsætningen nødt til at blive testet af, hvor der rulles et legeme ned ad det skrå plan, som har et kendt inertimoment, for at se, hvad en eventuel fejlmargen ville være – og om man kunne ændre på opstillingen for, at denne fejlmargen ville blive mindre.

¹⁷ Fogh, Esper og Knud Erik Nielsen: Stive Legemers Bevægelse. 2. udg. Silkeborg Bogtrykkeri, 1999. s. 26-27

Til testen blev der brugt en cylinder af metal, hvor massen og inertimomentet blev målt, ved brug af definitionen for inertimomentet for en cylinder $I = 0.5 \cdot m \cdot r^2$. Da vi ved, hvad inertimomentet er angivet som, kan vi udregne, hvad den teoretiske acceleration burde være, når cylinderen triller ned ad det skrå plan. Derfor kan vi sammenligne den teoretiske acceleration med den målte acceleration, og derved finde ud af, hvor præcis opsætningen er. Målet var, at accelerationen som maksimum måtte lægge 5 procent fra den teoretiske – og vi opnåede, at den som maksimum lå 4 procent fra, ved at ændre lidt på den oprindelige vinkel på det skrå plan. Derfor kan vi også sige, at den målte acceleration for diaboloen må være plus/minus 5 procent som afvigelse.

Den målte acceleration af diaboloen bygger på 15 målinger i samme opsætning, hvoraf gennemsnittet af disse er taget. Datasættet for de 15 målinger kan findes i bilag 2. Gennemsnittet af de 15 målinger er $-1,37973$, og dette er derfor accelerationen, vi kan bruge til bestemmelse af inertimomentet.

Følgende målinger af højden er lavet: $\Delta h = 13,3cm$ – denne er målt på $\Delta s = 60cm$ ved at måle lodret fra gulvet og op til det skrå plan. Derfor kan vinklen findes:

$$\sin^{-1}\left(\frac{13,3cm}{60cm}\right) = 12.81^\circ$$

Idet massen af diaboloen er $136,64$ gram og radius er 5 centimeter, kan værdierne puttes ind i formlen for acceleration, og derved kendes alt andet end inertimomentet, og derved kan denne findes:

$$-\frac{m \cdot g \cdot \sin(\theta)}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} = a \Rightarrow -\frac{136.64g \cdot 9.82 \frac{m}{s^2} \cdot \sin(12.81)}{136.64g + \frac{I}{(5cm)^2}} = -1.37973 \frac{m}{s^2}$$

Ved udledning og udregning fås følgende $I = 0.000197 kg \cdot m^2$

Denne kan så sammenlignes med beregningen af inertimomentet ved at kigge på selve diaboloen.

- Inertimoment fundet ved strukturen af diaboloen:

Man kan beregne inertimomentet for en diabolo ved at kigge på, hvordan den er bygget op, og gøre ligesom i kapitlet "Bestemmelse af et legemes inertimoment". Diaboloen er dog et noget mere indviklet legeme, da det hverken er fladt eller lige tykt nogle steder – dog kan man bruge en lidt anden fremgangsmåde.



Ved at skære diaboloen over på midten, og derved kigge på den opbygning fra siden, kan forskellige funktioner opsættes, der beskriver diaboloens radius – både til den indre og den ydre side. Dette kan gøres vha. billedanalyse i Logger Pro, hvor et koordinatsystem kan indsættes, og punkterne kan sættes. Idet én funktion ikke kan beskrive diaboloens inertimoment, bliver man nødt til at dele denne op i flere forskellige funktioner.

Den nemmeste måde at beregne inertimomentet på, er ved at dele den op i mange små ringe, da det vides fra teorien, at en rings inertimoment er givet ved $\Delta I = 0.5 \cdot \Delta m \cdot (R^2 - r^2)$.¹⁸

Massen m må kunne skrives som produktet af densiteten og volumen $m = \rho \cdot V$, derfor kan massen af én af ringene skrives som følgende:

$$\Delta m = \rho \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \Delta x$$

Hvor Δx er tykkelsen af ringene, og $\pi \cdot (R^2 - r^2)$ er arealet af ringene. Inertimomentet for ringene kan derfor skrives på følgende måde:

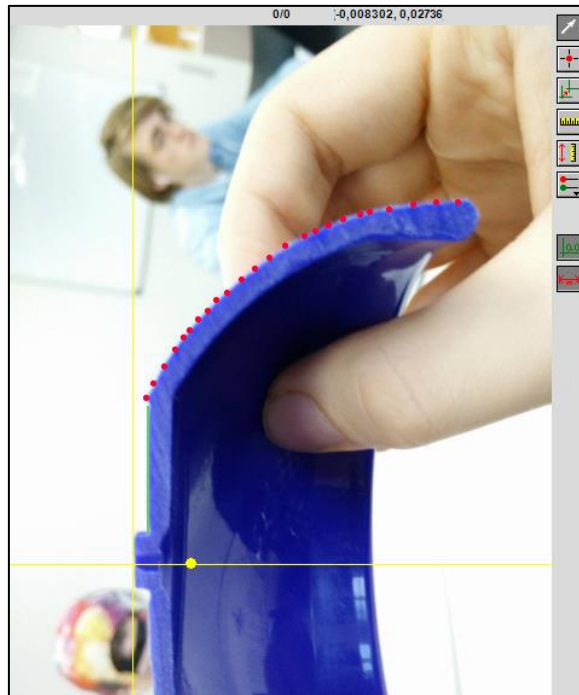
$$\Delta I = 0.5 \cdot \rho \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot (R^2 - r^2) \cdot \Delta x$$

Hvilket betyder ud fra Riemann-integralet, at det samlede inertimoment kan skrives som:

$$I = \sum \Delta I = \int_a^b 0.5 \cdot \rho \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot (R^2 - r^2) dx$$

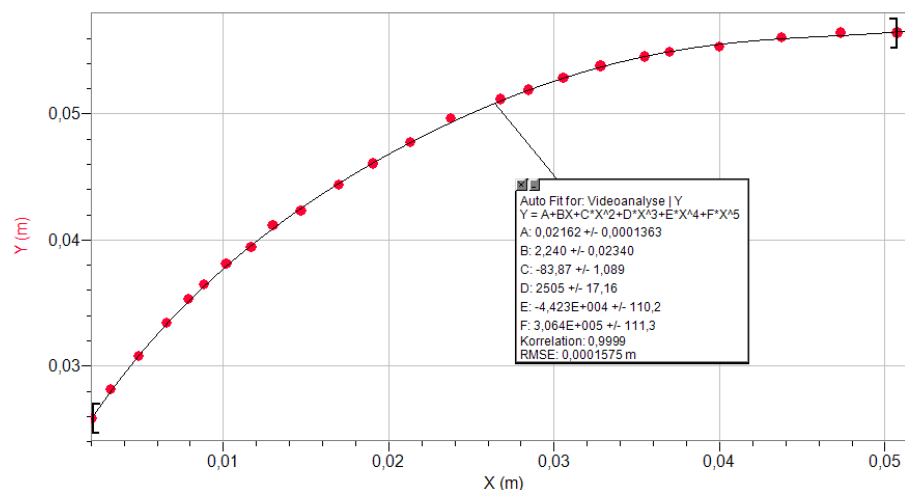
Vi kan lave to funktioner: En for den indre radius, $r = f(x)$ og en for den ydre radius $R = h(x)$, ved at prikke op i Logger Pro, som kan ses på følgende måde:

¹⁸ Fogh, Esper og Knud Erik Nielsen: Stive Legemers Bevægelse. 2. udg. Silkeborg Bogtrykkeri, 1999. s. 22.



Hvor det kan ses, at den ydre funktion $h(x)$ er prikket op (notér: Det er vigtigt man angiver en længde på billedet også (den grønne streg) – i dette tilfælde angives 0,02 meter, idet er hvad det lige stykke er målt til).

Når man har prikket denne op, kan man lave den regression, der passer bedst. I dette tilfælde var den funktion der passede bedst, et femtegradspolynomium. Regressionen ser således ud:



Her fås en funktion, som kan bruges i udregningen af inertimomentet.

Idet densiteten ρ kan skrives som $\frac{m}{V}$ kan den findes ved at udregne volumen af diabolo-delen og ved at måle massen af den. Volumen kan findes ved at bruge de indre og ydre funktioner der findes og finde omdrejningslegemet af disse (da man kan trække volumen for den indre

funktion fra volumen for den ydre). Det kan man gøre ved brug af matematikkens formel til at finde rumfanget af et omdrejningslegeme:

$$V = \pi \cdot \int_a^b h(x)^2 - \pi \cdot \int_a^b f(x)^2$$

Massen kan måles, og denne er målt til 21,5 gram, men denne skal fordobles, idet der er to plastikdele.

Derfor må inertimomentet for diabolo-delen kunne skrives således:

$$\int_a^b 0.5 \cdot \frac{m}{V} \cdot \pi \cdot (h(x)^2 - f(x)^2) \cdot (h(x)^2 - f(x)^2) dx$$

Hvor a og b er intervallet for den funktion, som er kreeret i Logger Pro.

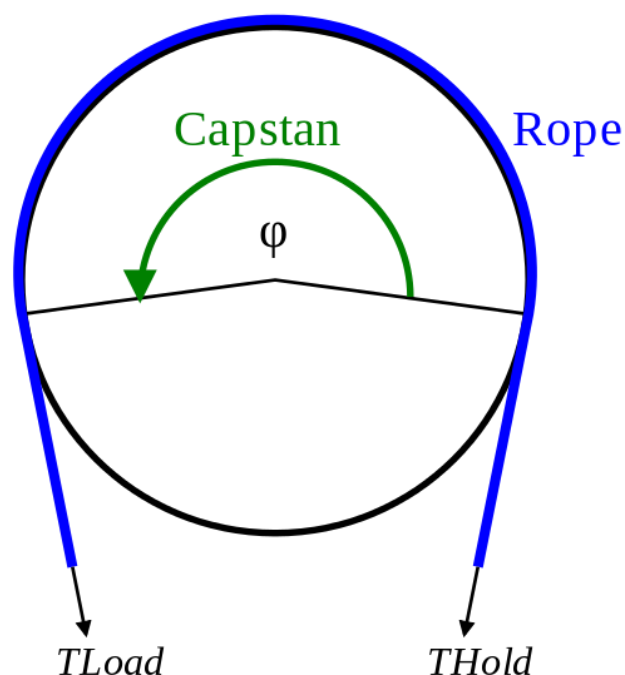
Idet diaboloen er opbygget af mange forskellige dele, skal mange forskellige inertimomenter findes, for de forskellige dele – summen af alle disse er det samlede inertimoment. Ved udregning (se bilag 3) fås et inertimoment på 0.00014, hvilket ligger 0.000057 fra det eksperimentalt fundne inertimoment. Der er derudover også prøvet at lave simplere udregninger af inertimomentet, ved at antage, at plastikdelen har en simplere form (som en cylinder), men dette gav ikke et resultat, som kunne bruges.

Der er altså en del fejlkilder, som kan påvirke dette resultat. Den vigtigste er, at prikningen af funktioner har en del fejl i sig, idet det er umuligt at prikke helt optimalt. Ud over dette er der fejlmargen på omkring 5 procent, hvor inertimomentet blev fundet eksperimentalt. Der er også nogle mindre dele i diaboloen, som vil have en lille indvirkning på inertimomentet fundet i strukturen – men denne er så lille, at den ikke vil have en stor indvirkning på inertimomentet, idet massen og størrelsen af disse er så lille. Der er også mange parametre i udregningen der kan ændres lidt – fx længden man har angivet på billedet, idet en lille fejl kan have stor betydning for det endelige resultatet. Det samme hvis koordinatsystemet er fejlplaceret bare en lille smule. Resultatet kunne derfor lægge en smule tættere på, hvis længderne kunne måles til flere betydende cifre – og hvis prikkerne kunne sættes mere præcist, men dette har vi ikke udstyr til.

- **Gnidningskoefficienten for diaboloen:**

Ved forsøg vil vi nu finde gnidningskoefficienten for det runde stykke af diaboloen, hvor snoren normalt kører, når man udfører tricks. Der tages udgangspunkt i den statiske gnidningskoefficient.

Forsøget blev udført ved at skille diaboloen ad, og hænge den midterste skive op i et system, så den statiske gnidningskraft kunne måles ved opsætningen, ved at hænge et lod i hver ende af en snor, som sættes over den cirkulære skive. Et lod på 100,2 gram blev hængt op i den ene side, og i den anden side blev massen varieret, idet formålet var at finde den mindst mulige masse på det andet lod, så snoren ville være i et stillestående stadie. Efter mange forsøg med at påsætte og fjerne noget masse, blev det limiteret til, at den mindst mulige masse for, at snoren ikke ville glide på diabolo-delen, ville være 75,2 gram. Altså en forskel på 25 gram på de to sider. Når man har disse informationer kan Capstan ligningen bruges til at udregne gnidningskoefficienten.



19

Capstan ligningen går ud på at kigge på et reb om et rundt legeme, for enten finde hvor meget kræft rebet trækker med i en af siderne, eller for at finde gnidningskoefficienten. Måden man gør det på er ved at kigge, hvor meget rebet er snoet om det runde legeme, og ved at kigge på trækstyrken vha. følgende ligning:

$$T_{load} = T_{hold} \cdot e^{\mu\phi}$$

¹⁹ Diagram to explain the capstan equation.. Vedala, Krishna. Set: https://en.wikipedia.org/wiki/Capstan_equation#/media/File:Capstan_equation_diagram.svg. 16.12.2015. (Billede)

Hvor T_{load} er trækkræften for rebet med det tungeste lod, T_{hold} er trækkræften for rebet med det letteste lod, μ er gnidningskoefficienten og φ er hvor stor en del af det runde legeme rebet er drejet om målt i radianer.²⁰

Idet lodderne hænger frit fra det runde legeme i opsætningen vil delen rebet er drejet om det cirkulære legeme være π , idet en fuld cirkel er 2π , og rebet må blot være drejet om halvdelen. Derudover kan T_{load} og T_{hold} udregnes, idet vi har masserne $m_1 = 100,2g$ og $m_2 = 75,2g$, så kan tyngdekraften på disse to udregnes, og det må være rebenes trækraft i hver ende:

$$T_{load} = 100,2g \cdot 9.82 \frac{m}{s^2} = 0.984N$$

$$T_{hold} = 75.2g \cdot 9.82 \frac{m}{s^2} = 0.738N$$

Derudover har vi informationen $\varphi = \pi$

Derfor kan vi udregne gnidningskoefficienten på følgende måde:

$$0.984N = 0.738N \cdot e^{\mu \cdot \pi}$$

Ved udledning og udregning fås $\mu = 0.0916$

Den statiske gnidningskoefficient for diaboloens midt-del er derfor 0.0916. Gnidningskoefficienten har en stor betydning, når man laver tricks med en diablo, idet det er den man bruger for at få dens vinkelhastighed ω op, så man kan lave tricks med dem. Den måde man får diaboloens vinkelhastighed op, vil vi kigge nærmere på.

• Kræfter i et diablo-trick

Vi kigger på et simpelt trick, der bliver lavet med en diablo, for at se, hvilke kræfter og energier der træder i kraft, når sådan et bliver udført. Der kigges på et trick, hvor diaboloen bliver løftet op ved at stramme snoren, når den er i rotation:²¹

²⁰ Capstan Equation. Udgivet af Wikipedia. Internetadresse: https://en.wikipedia.org/wiki/Capstan_equation - Besøgt d. 16.12.2015 (Internet)

²¹ Youtube: Some cool easy diablo tricks. Udgivet af syversveen sin kanal. Internetadresse: <https://www.youtube.com/watch?v=RKdoHI8WAoQ> - Besøgt d. 15.12.2015 (Internet)



Drengen starter forsøget med at få diaboloen til at roterer, som kan ses på billedet.

For at få diaboloen til at roterer trækker drengen hårdt i snoren med sin venstre hånd, hvilket resulterer i, at diaboloen begynder at roterer mod uret (fra vores vinkel). Dette sker på grund af gnidningen mellem snoren og diaboloen, idet han trækker i snoren, vil diaboloen derfor følge med, idet gnidningskraften får samme retning som snorkraften. Han trækker kun med den ene arm, da den ellers ville skifte mellem at roterer den ene og den anden vej, hvilket vil få diaboloen til at være stille, hvis han trækker med samme kræft med begge hænder.

Man kan altså sige, at hans T_{hold} er nul, idet der ikke trækkes med den ene hånd, og hans T_{load} er stor, hvilket er det, der skaber rotationen.



I tricket drejes snoren hele vejen rundt om diaboloen, og ved at stramme snoren løftes den op, og løsnes snoren falder den lidt.

Grunden til, at diaboloen ryger opad når snoren spændes, er fordi, at snoren spændes så hårdt om diaboloen, at det er den statiske gnidningskraft mellem snoren og diaboloen træder i kraft. Den statiske gnidningskraft er større end den dynamiske, og derfor stiger diaboloen op. Idet han løsner snoren, så er det den dynamiske, og idet de er mindre end den statiske, så ryger diaboloen nænsomt nedad.

Gnidningskraften gør dog også, at vinkelhastigheden for diaboloen aftager, så den kommer til at rotere med lavere og lavere fart, derfor er dette et trick, der kun kan gøres i kort tid.

- **Konklusion:**

I opgaven har vi vist hvordan inertimomentet er skabt, og hvordan det har betydning for energien for et stift legeme der roterer. Der er også kigget på den samlede kinetiske energi, og hvordan der via Königs sætning kan vises, hvordan den samlede kinetiske energi er givet. Derudover er der også kigget på den mekaniske energi, og hvordan denne kan bruges til at bestemme accelerationen for et legeme der udfører et rent rul, eller hvordan det kan bruges til at bestemme inertimomentet for et legeme eksperimentelt. Vi har også kigget på, hvordan inertimomentet kan findes ved at kigge på strukturen i en diabolo og ved at bruge integralregning i form af Riemann-integralet.

Ydermere har vi kigger på gnidningskonstanten for den midterste del af en diabolo, og også hvordan gnidningskraften har betydning for de fundamentale tricks, man kan lave med en diabolo.

Vi kan til sidst konkludere, at inertimomentet for et legeme der har en kompleks struktur kan være svært at finde, og at det også mange gange er vigtigt både at kigge på teorien og eksperimenter, for at være sikker på, hvad inertimomentet er. Der kan være en masse parametre, som kan påvirke et legemes inertimoment, og det er præcis dette, der gør, at det kræver høj præcision at finde, som vi i det almene gymnasium ikke altid har mulighed for at opnå helt præcist. Via matematiske metoder og viden inden for fysik kan der dog opnås en form for resultat, som kan diskuteres ud fra de parametre, som der er.

- **Litteraturliste**

Bøger:

- Fogh, Esper og Knud Erik Nielsen: Stive Legemers Bevægelse. 2. udg. Silkeborg Bogtrykkeri, 1999.
- Grøn, Bjørn m.fl.: Hvad er matematik? A. 1. udg. Lindhardt og Ringhof, 2013.
- Young, Hugh D. og Roger A. Freedman: I: University Physics. 9. udg. Addison-Wesley Publishing Company, 1996.

Links

- Om Riemann-integralet. Noter til matematik 1. Udgivet af Aalborg Universitet. Internet-adresse: <http://people.math.aau.dk/~matarne/09-mat2/riemann.pdf> - Besøgt d. 10.12.2015 (PDF)
- Mekanik. Udgivet af Gyldendal - Den Store Danske. Internetadresse: http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Klassisk_mekanik_og_kvantefysik/mekanik - Besøgt d. 10.12.2015 (Internet)
- Capstan Equation. Udgivet af Wikipedia. Internetadresse: https://en.wikipedia.org/wiki/Capstan_equation - Besøgt d. 16.12.2015 (Internet)

Videoer

- Youtube: Some cool easy diabolo tricks. Udgivet af syversveen sin kanal. Internet-adresse: <https://www.youtube.com/watch?v=RKdoHI8WAoQ> - Besøgt d. 15.12.2015 (Internet)

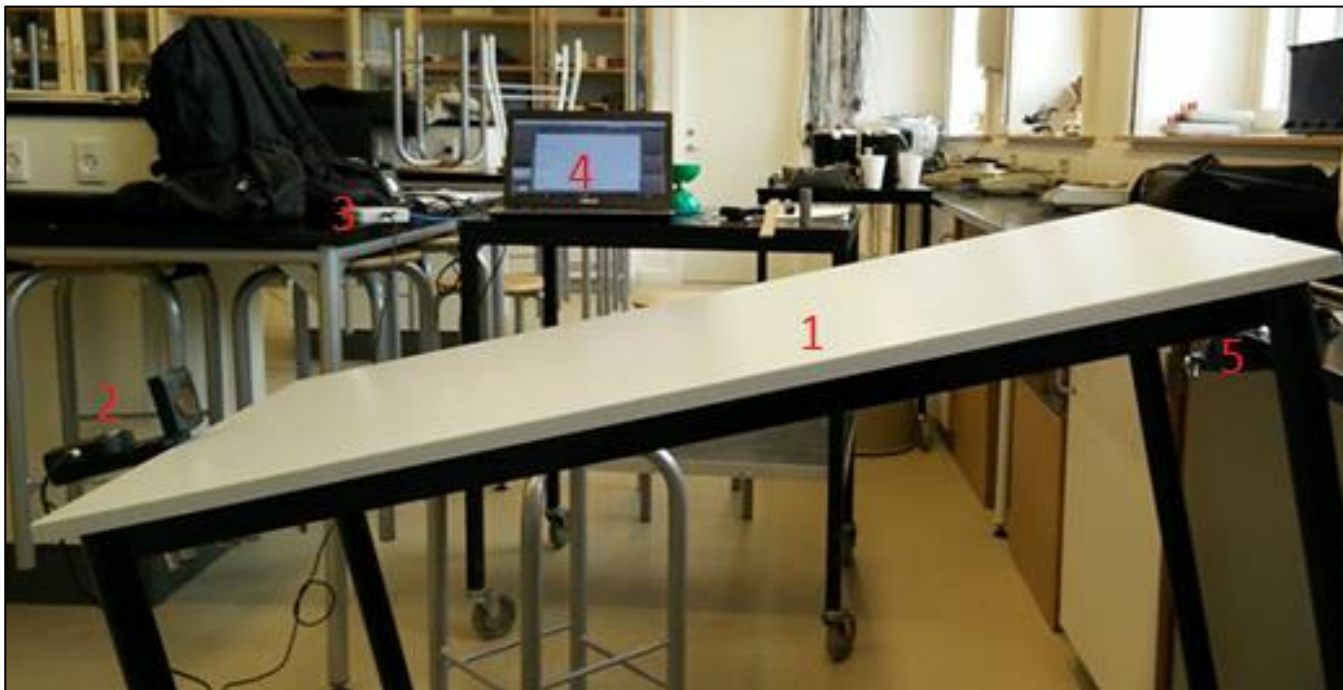
- **Bilag 1:**

Uddybet forsøgsopstilling samt materialeliste.

- **Materialeliste:**

Materialelisten er som følger (se billede for referencer):

1. Et bord, der kan bruges som skråt plan ved at løfte det i den ene ende.
2. Elektronisk afstandsmåler
3. LabQuest med tilhørende ledninger
4. Computer med programmet Logger Pro
5. Noget der kan løfte bordet (her er brugt en skruevinge med en metalplader der støtter bordets placering).



- **Forsøgsopstilling:**

Forsøget går ud på, at man har et skråt plan i form af et bord, hvor man kan trille et objekt ned ad (her en diablo). Derudover placeres afstandsmåleren i midten af bunden af det det

skrå plan (se billede), så denne kan måle op ad det skrå plan. Dataopsamlingen sker via computeren.

- **Dataopsamling**

Under fanen "Dataopsamling" i Logger Pro sættes måleren til 20 målinger pr. sekund i 5 sekunder – dette kan først gøres, når afstandsmåleren er sat til computeren via LabQuest.

Målingen startes og diaboloen bliver trillet ned ad det skrå plan, direkte mod afstandsmålet, så den kan måle, hvilken acceleration den ruller med – denne skulle meget gerne være konstant.

For at sikre sig, at ens forsøgsopstilling fungerer korrekt og godt, kan man rulle et kendt objekt som fx en cylinder ned ad det skrå plan, der gør, at man kan udregne den teoretiske acceleration og sammenligne med den målte.

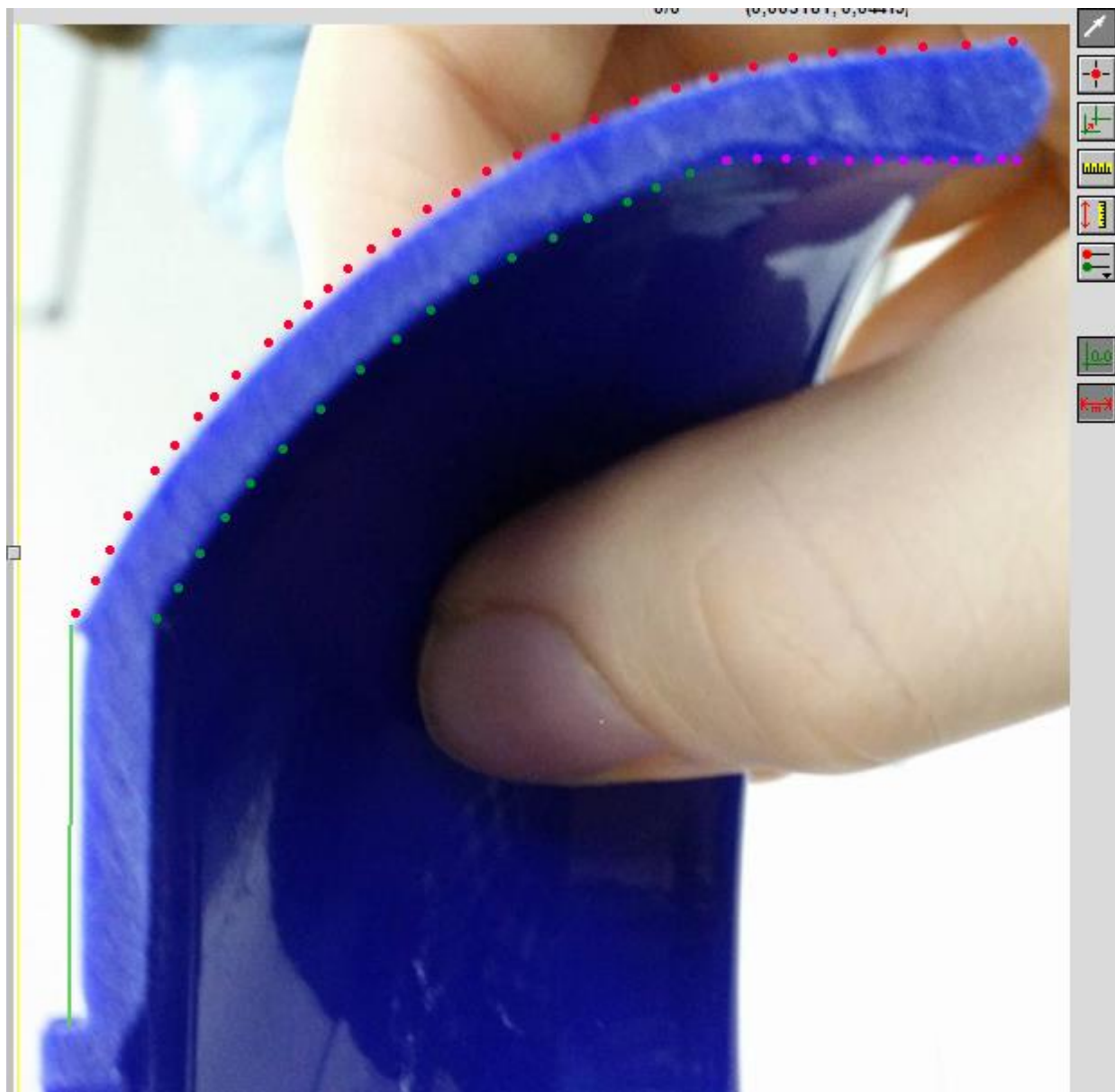
- **Bilag 2:**

Her ses skemaet for den målte acceleration ved rulning af diaboloen.

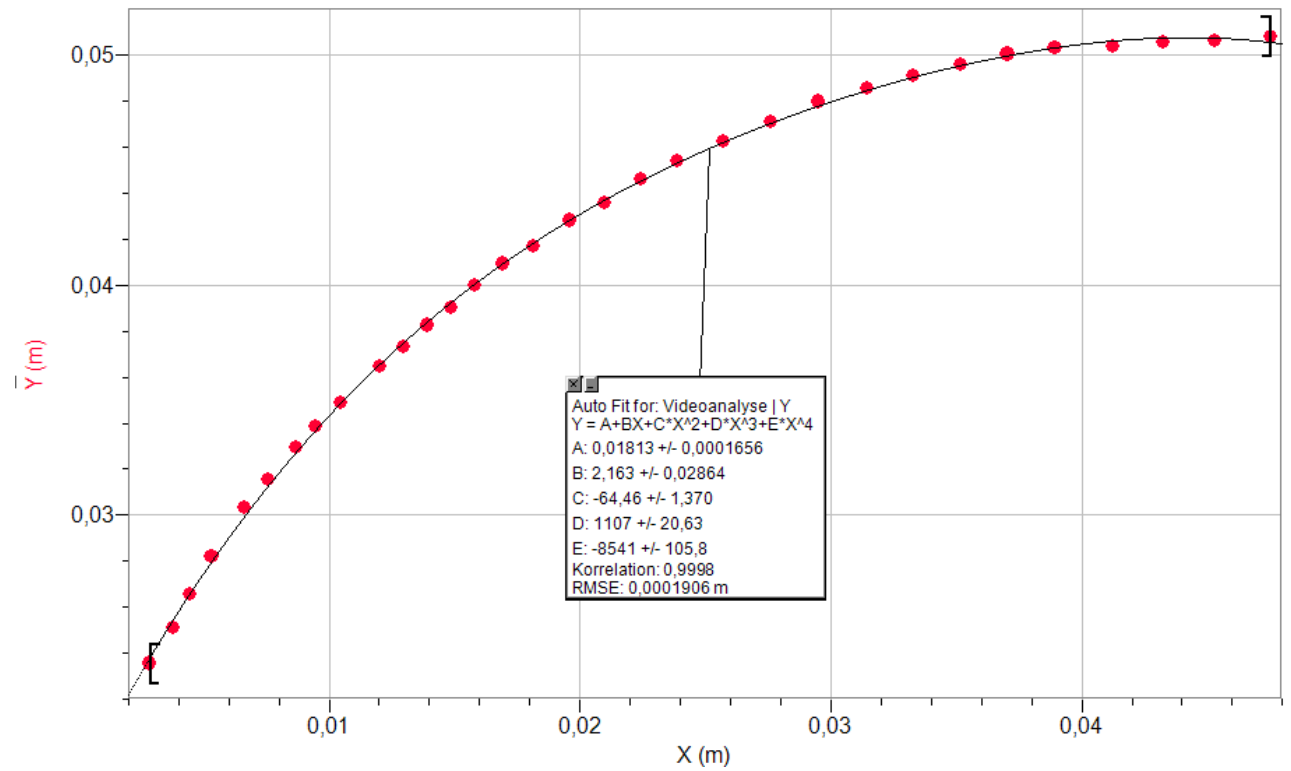
$a/(m/s^2)$
-1,414
-1,363
-1,402
-1,371
-1,393
-1,302
-1,379
-1,388
-1,415
-1,343
-1,404
-1,343
-1,409
-1,371
-1,399

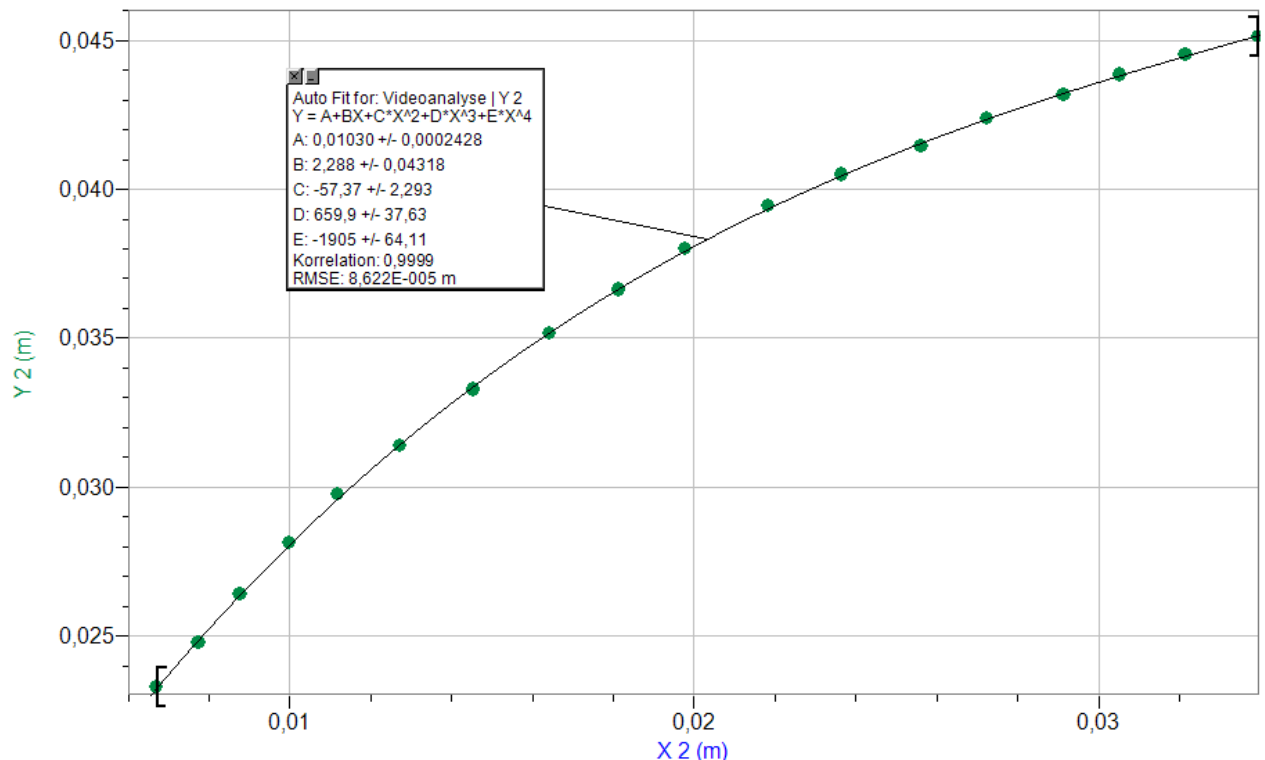
- **Bilag 3**

Der bruges tre funktioner. Den ydre $h(x)$ den ene indre $f(x)$ og den anden indre $v(x)$, som kan ses prikket på dette billede:



Der fås derfor tre funktioner, der laves regression på (bortset fra den der går lige, idet det er en konstant). $h(x)$ og $f(x)$ vises her:

$h(x)$: $f(x)$:



Konstanten for $v(x)$ er 0.04516.

Vi har derfor disse tre funktioner:

$$h := x \rightarrow 0.01813 + 2.163 \cdot x - 64.46 \cdot x^2 + 1107 \cdot x^3 - 8541 \cdot x^4$$

$$f := x \rightarrow 0.01030 + 2.288 \cdot x - 57.37 \cdot x^2 + 659.9 \cdot x^3 - 1905 \cdot x^4$$

$$v := x \rightarrow 0.04516$$

Derfor kan vi udregne volumen af plastikkdelen ved trække omdrejningslegemet for de to indre funktioner fra omdrejningslegemet for den ydre:

$$\pi \cdot \int_{0.002837}^{0.04754} (h(x))^2 dx - \pi \cdot \int_{0.006706}^{0.03396} (f(x))^2 dx - \pi \cdot \int_{0.03396}^{0.04754} (v(x))^2 dx$$

Hvilket er 0.00006440165161

Dette kan indsættes i formelen for inertimomentet – men dette skal regnes af to dele – først for den ydre og den ene indre, og derefter for den ydre og den anden indre. Herefter tages summen:

$$\int_{0.006706}^{0.03396} 0.5 \cdot ((h(x))^2 - (f(x))^2) \cdot \frac{m}{0.00006440165161} \cdot \pi \cdot ((h(x))^2 - (f(x))^2) dx$$

$$= 0.000004575797479$$

Og

$$\int_{0.03396}^{0.04754} 0.5 \cdot ((h(x))^2 - (v(x))^2) \cdot \frac{m}{0.00006440165161} \cdot \pi \cdot ((h(x))^2 - (v(x))^2) dx$$

$$= 0.000003556624794$$

Summen tages:

$$0.00006440165161 + 0.000004575797479 = 0.00006897744909$$

Der ganges med to idet der er to plastikdele i en diabolo:

$$0.0001379548982$$

Hvilket tilnærmelsesvist er det teoretiske inertimoment for diaboloen. De andre dele vil have en så lille indflydelse, at dette tal kan sammenlignes med den eksperimentelt fundne.