SRO

Newtons afkølingslov og differentialligninger

Josephine Dalum Clausen

2.Y Marts 2011

SRO

Abstract

In this assignment I want to illuminate mathematic models and its' use in the daily movement. By math it's proven how all solutions equals first-order equations
$y' = a * y$ and $y' = a * y + b$.

Newton's law of cooling is presented combined with a short introduction of heat and energy on the molecular level.

This is followed by an experiment that shows us how a cup of coffee is cooled down caused by the surroundings' temperature. Affects and error sources are discussed, including a discussion about the mathematic model and how it suits the observations.

Indhold

Indledning

Matematiske modeller opstilles inden for mange fag og emner i hverdagen. Inden for naturvidenskaben gøres der især brug af matematiske modeller, for at kunne forudsige og beregne mulige observationer. Man prøver altså at tilnærme sig den virkelige verden, ved hjælp af håndgribelige modeller.

Generelt i fysikken bliver der brugt utallige matematiske modeller. I forbindelse med varmetab gør man ofte brug af en matematisk model kaldet Newtons afkølingslov. Denne lov gør det muligt ud fra observationer at lave yderligere beregninger med disse resultater. Dog udelades der også variabler af mindre betydning.

Problemformulering

I opgaven ønskes der en redegørelse for matematiske modeller, herunder differentialligningsmodeller. Dette leder op til en redegørelse for bestemmelsen af samtlige løsninger til følgende differentialligninger af 1. orden:

1. Bevis for samtlige løsninger $y' = a * y$
2. Bevis for samtlige løsninger til $y' = a * y + b$

Dette efterfølges af en redegørelse for Newtons afkølingslov. Herefter fremlægges et forsøg omhandlende varmeafgivelsen fra en varm kop kaffe til omgivelserne. Herunder diskuteres forsøget, fejlkilder og den matematiske models problematikker.

Matematiske modeller

Matematiske modeller bruges ofte i naturvidenskaben. En matematisk model er en opstilling eller beregninger, der skal tilnærme sig virkelighedens resultater så godt som muligt. I mange forsøg og eksempler spiller mange variabler ind på det endelige resultat. Oftest udelades nogle af disse i vores beregninger, da vi vurderer, at de har mindre betydning for det endelige resultat. Den matematiske model er derfor ikke altid præcis, men giver os en god idé om hvad vi kommer til at observere.
Et eksempel på dette kan være ved beregning af bevægelsesenergi:

$$E_{KIN} = m * v$$

Bevægelsesenergien regnes altså ud fra massen og hastigheden, hvor en variabel som luftmodstanden altså ikke medregnes. Dette skyldes at der ikke forventes større relevante udslag ved at fjerne denne variabel.

Differentialligningsmodeller og vækst

Differentialligningsmodeller ses ofte i forbindelse med *bevægelse i fysik, populationsvækst i biologi eller økonomisk vækst i samfundsfag*[1]. Her er det vigtigt at gøre sig klart hvilke faktorer, love og parametre der spiller ind. I disse beregninger kan det ønskes at finde en væksthastighed i et givent punkt hvilket udtrykkes som en differentialkvotient.

Vi kan tage udgangspunkt i et eksempel[2] fra biologien, hvor vi placerer nogle bakterier i en næringsvæske der vil få cellerne til at dele sig. Vi observerer at cellepopulationen vokser i takt med tiden. Tiden er altså vores *x*-værdi, mens antallet af bakterier er *f(x)*. Ønsker vi at finde væksthastigheden på et givent tidspunkt skal vi altså finde *f'(x).* I sådanne eksempler kan det somme tider også være relevant at finde vækstraten der er forholdet mellem væksthastigheden og antallet af bakterier, altså: $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Differentialligninger af 1. orden

Løsningen til differentialigninger er altid en funktion, da der i en differentialligning altid både er *f'(x)* og *f(x)*[3]. I mange differentialligningtyper kan man altså angive en regneforskrift for løsningsfunktionerne.

Differentialligninger kan opskrives på forskellige måder:

1. $f'(x) = 2f(x)$
2. $y' = 2y$
3. $dy/dx = 2y$

Regneregler

Når vi arbejder med differentialligninger af 1. orden, skal vi kende til visse regneregler:

1. Monotonisætningen:

   Hvis $f'(x) = 0$ er det ensbetydende med at $f(x) = k$.

2. Differentialkvotienten for en funktion (*h(x)*), der er produktet af to funktioner (*g(x)* og *f(x)*) udregnes således:

   $h(x) = g(x) * f(x) \Leftrightarrow h'(x) = g'(x) * f(x) + g(x) * f'(x)$

3. Potensregnereglen:

   $x^n * x^m = x^{n+m}$

4. Almindelige regneregler for løsning af ligninger

Bevis for samtlige løsninger til $y' = a * y$

$y' = a * y$

Der ganges med e^{-a*t} på begge sider af lighedstegnet

$y' * e^{-a*t} = a * y * e^{-a*t}$

Hele udtrykket sættes nu på samme side af lighedstegnet, således at vi får 0 på den ene side

$y' * e^{-a*t} - a * y * e^{-a*t} = 0$

- a og y flyttes nu rundt

$y' * e^{-a*t} - y * a * e^{-a*t} = 0$

Da regneregelen siger at $e^{-a*t}{}' = -a * e^{-a*t}$ får vi følgende;

$y' * e^{-a*t} + y * (e^{-a*t})' = 0$

Produktreglen tages nu i brug

$(y * e^{-a*t})' = 0$

Monotonisætningen bruges og c bruges som konstant

$y * e^{-a*t} = c$

Der ganges med e^{a*t} på begge sider af lighedstegnet

$y * e^{-a*t} * e^{a*t} = c * e^{a*t}$

$e^{-a*t} * e^{a*t} = 0$

$y * e^{0} = c * e^{a*t}$

$e^{0} = 1$

$y = c * e^{a*t}$

Denne model kan bruges ved afkøling hvis omgivelsestemperaturerne er på 0. Denne model er altså ikke optimal når vi regner med afkøling ved stuetemperaturer eller enhver anden temperatur.

Bevis for samtlige løsninger til *y' = a * y + b*

$y' = a * y + b$

a sættes uden for en parentes

$y' = y + \frac{b}{a}$

Der gøres nu bryg af at $(y + \frac{b}{a})' = y' + (\frac{b}{a})' + y' + 0 = y'$

$(y + \frac{b}{a})' = a * (y + \frac{b}{a})$

$y + \frac{b}{a}$ erstattes med *z*

$z' = a * z$

Resultatet fra *Bevis for samtlige løsninger til y' = a * y*

$z = c * \boldsymbol{e}^{a*t}$

$y + \frac{b}{a}$ sættes ind i modellen igen

$y + \frac{b}{a} = c * \boldsymbol{e}^{a*t}$

$\frac{b}{a}$ trækkes fra på begge sider af lighedstegnet

$y = c * \boldsymbol{e}^{a*t} - \frac{b}{a}$

Denne matematiske model kan fx bruges ved beregning af temperaturfald i forskellen mellem et materiale og omgivelserne, da alle faktorer der ønskes inddraget er dækket.

Newtons afkølingslov

Termisk energi er bevægelse på atomart niveau. Når vi tilføjer energi vil molekylerne bevæge sig hurtigere. Temperatur fortæller os om et stofs indre energi. Her måler vi i celsius og kelvin, hvor $1^{o}C/k$ er den samme mængde energi. I forbindelse med molekylernes bevægelse, betyder det at molekylerne bevæger sig hurtigere ved høje temperaturer og langsommere ved lave temperaturer.
Under afkøling afgives der energi fra vores materiale til omgivelserne. Newtons afkølingslov fortæller os, at effekten er proportional med temperaturforskellen, når der afgives energi i form af varme til omgivelserne. Hvis vi går ud fra denne opgaves eksempel, hvor varme afgives fra vandet til omgivelserne vil formlen lyde således:

$$P = k * A * (T_{VAND} - T_{OMGIVELSER})$$

Man kan opstille en differentialligning ud fra newtons afkølingslov, som udtrykker udviklingen af legemes temperatur *dy/dt*, ved hjælp af en differentialligning:

Hvis vi går ud fra at omgivelsestemperaturen er $25^{o}C$, vil en afkøling af materialet som funktion af et givent tidsinterval *t* være:

$$\frac{dy}{dt} = c\,(y(t) - 25) \qquad \text{hvor :} \quad t > 0$$

dy/dt: er temperaturændringen

y(t) - 25: er temperaturforskellen mellem legemet og omgivelserne

c: er en given proportionalitetsfaktor

Forsøg: Afkøling af kaffe

Formål

Vi ved med forsøget undersøge hvordan temperaturforskellen mellem kaffe og omgivelserne aftager. Det forventes at hastigheden, hvormed temperaturen falder, vil være proportional med forskellen på kaffens og luftens temperaturer.

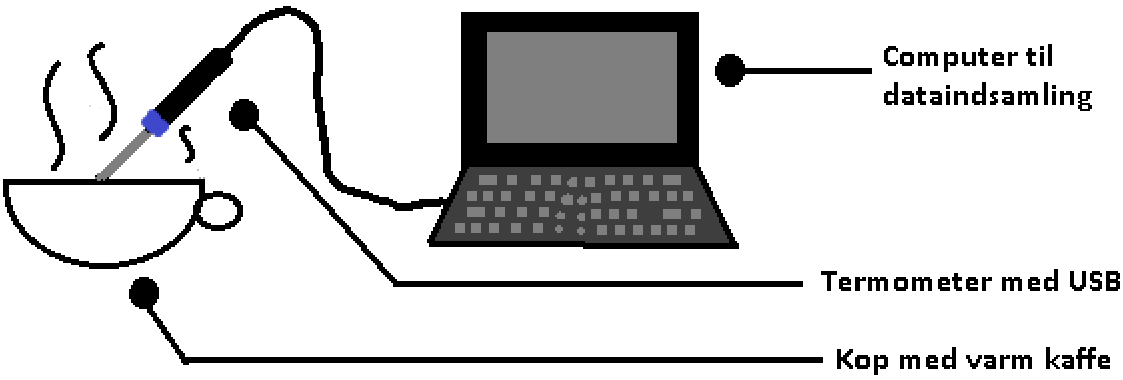
Materialer

- Kop til kaffe
- Varm kaffe
- Termometer m. USB (tilsluttet til computer så dataindsamling kan foregå vha. loggerPro)

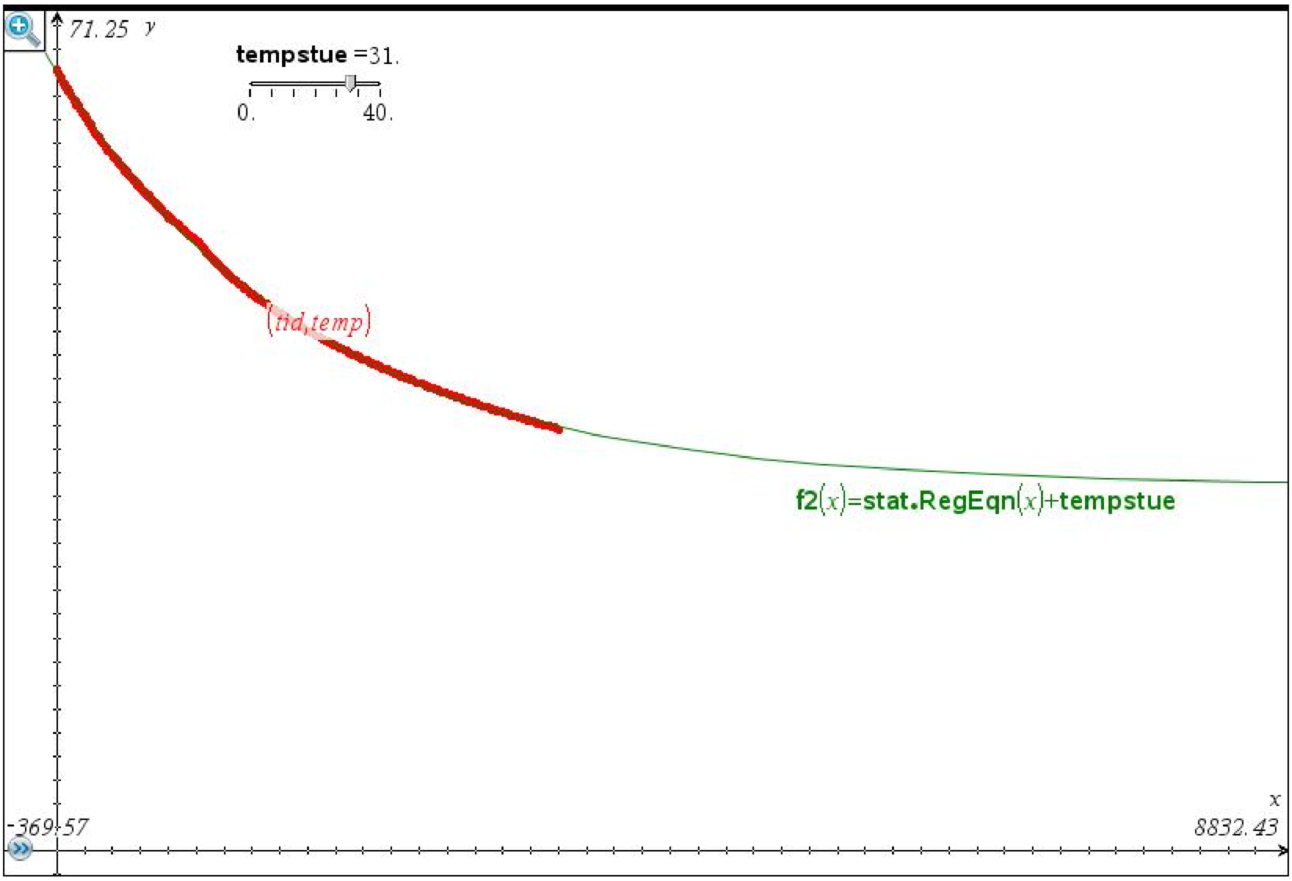
Fremgangsmåde

Kaffen brygges med opvarmet vand og fyldes i en kop. Termometeret placeres i glasset og målingerne sættes i gang i loggerPro. Vi lader forsøgsopstillingen stå til temperaturen ikke længere ændres.

Forsøgsopstilling



Resultater



Graf 1: På grafen er x-aksen angivet som tiden, mens y-aksen er temperaturen af kaffen. De røde punkter er data fra forsøget, mens den grønne graf er lavet med CAS-værktøjet der giver os eksponentielregression ud fra det målte data. Et skydelement er hertil indsat for at kunne ændre på stuetemperaturen, så vi kunne finde stuetemperaturen ud fra regressionen.

Fejlkilder

- Upræcise temperaturmålinger

  Hvis der har været ændringer i stuetemperaturen kan det have ændret på det endelige resultat. Disse ændringer kunne skyldes konvektion.

- Isolering i koppen

  Koppens isoleringsevne bliver ikke brugt i efterbehandlingen.

- Ufuldstændigt forsøg

  Forsøget stod ikke så længe at temperaturen var stoppet med at falde og grafen var fladet helt ud.

Kaffen nåede altså ikke stuetemperatur før afbrydelse.

Efterbehandling[2]

Graf1: I TI oprettes der endnu en kolonne i lister og regneark, og forskellen mellem stuetemperaturen og temperaturmålingerne findes for alle observationer. Vi går ud fra at sammenhængen mellem tiden og temperaturforskellen aftager eksponentielt. Dette kontrolleres ved at der hertil ved hjælp af CAS-værktøj laves ekspotentiel regression over tiden og temperaturforskellen. Her fås r^2= 0,9884.
For at undersøge om der som forventet er en sammenhæng ekspotentiel sammenhæng mellem kaffens temperatur og temperaturforskellen mellem kaffen og omgivelserne, indsættes der i TI et skydeelement. Skydeelement er altså til for at regulere på stuetemperaturen, hvor vi så kan læse stuetemperaturen ud fra denne værdi. Dette skydeelements interval sættes mellem 20 og 40 °C. Vi kan se at regressionen ligger sig ret præcist op af den indsamlede datas punkter når stuetemperaturen i skydeelementet er sat til 31°C. I regressionen er r^2 = 0,9996.

I forbindelse med behandling af vores data, forsøgte vi nu at gøre brug af vores differentialligning. Først bestemmes en forskrift for løsningen på vores differentialligning, hvor vi lægger ud med at gøre brug af følgende data fra vores eksperiment:

- Ved forsøgets start (0 sekunder) havde vores kaffe temperaturen 66,3 °C
- Efter 1800 sekunder (30 minutter) havde kaffen temperaturen 41,1 °C.
- Ud fra regressionen havde vi en stuetemperatur på 31 °C.

Vi anvender nu et CAS-værktøj, TI-Nspire til at løse ligningen, hvor vi har indsat stuetemperaturen:

$\text{deSolve}\left(temp'=-k\cdot(temp-31),t,temp\right)$	$temp=\mathbf{c1}\cdot \mathbf{e}^{-k\cdot t}+31$

Vi får heraf formen:

$$\frac{b}{a}+c*e^{-at}$$

Løsningen hedder altså:

$$c*e^{-k*t}+31$$

Ud fra vores eksperiment ønsker vi herefter at bestemme værdierne for *c* og *k* således:

Først bestemmes *c* ud fra temperaturen ud fra starttemperaturen (0 sekunder/0 minutter):

$$solve\left(c \cdot e^{-k \cdot 0}+31=66.3, c\right) \quad c=35.3$$

k findes nu ud fra temperaturen til tiden 1800 sekunder/30 minutter:

$$solve\left(35.3 \cdot e^{-k \cdot 30}+31=41.1, k\right) \quad k=0.041712$$

Ud fra dette har vi forskriften:

$$T=35{,}3*e^{-0{,}041712*t}+31$$

Ved at indsætte vilkårlige værdier for *t* i en tabel får vi disse resultater:

Tid i min.	0	10	30	60
Temperatur i °C	66,3	54,3	41,1	33,9

Herunder ses de observerede resultater ved samme tidsangivelser:

Tid i min.	0	10	30	60
Temperatur i °C	66,3	56,2	41,1	35,7

Den største afvigelse ligger altså på 1,9°C, altså en afvigelse på ca. 3,5 %.

Diskussion

Temperaturen aftager eksponentielt pga. molekylernes bevægelse. Da temperaturforskellen mellem kaffen og omgivelserne er størst i starten af forsøget, da kaffen er varmest, vil temperaturen falde hurtigst her. Dette skyldes som sagt at molekylerne bevæger sig langt hurtigere ved de høje temperaturer, og varmen vil derfor også afgives hurtigere.

Ud fra sammenligning af den matematiske model ses der afvigelser på 3,5 %, hvor flere faktorer kan have spillet ind. Konvektion kan have haft en mindre betydning for resultatet, men bør umiddelbart ikke have haft en særlig indflydelse da forsøget foregik i et småt lukket rum. Omvendt kan det lukkede rum også have gjort at stuetemperaturen er blevet varmet op omkring forsøgsopstillingen. Her kan det forestilles at luften dermed har skabt en mindre isolationsevne i sig selv. Denne faktor går jeg umiddelbart ikke ud fra har haft en større indflydelse, men den kan være værd at overveje.

Desuden foregår der et varmetab i form af varmestråling, som der heller ikke er taget hensyn til.

Stuetemperaturen blev ud fra vores beregninger med CAS-værktøjer angivet til 31^{o}C. Denne stuetemperatur er bemærkelsesværdi høj, sandsynligvis højere end den egentlige stuetemperatur. Dette skyldes sandsynligvis at forsøget blev stoppet før kaffen havde ramt stuetemperaturen. Der er hertil lavet en regression ud fra ufuldstændig dataindsamling. Andre faktorer som isolering og konvektion kan også have haft indflydelse.

I forbindelse med dette forsøg kunne det også have været relevant at lave forsøg med forskellige mængder vand. Her ville vi gå ud fra at en større mængde vand ville tage længere tid at nedkøle da en større mængde energi skulle afgives til omgivelserne.

Konklusion

Den matematiske model kan med tilnærmelse give os en idé om udfaldet i dette forsøg. Matematiske modeller beskriver et afgrænset område af virkeligheden, og da variabler som isolering og konvektion er udeladt, kan dette forsøg ikke beskrives præcist med en matematisk model.

Litteraturliste

1. Gyldendals Gymnasiematematik Grundbog A, Gyldendal 1. udgave 1. opslag 2007, Flemming Clausen m.fl., s. 65 – 68
2. Matema10k Matematik for gymnasiet A-niveau (Bind 3), Frydenlund 2007, Thomas Jensen m.fl., s. 203 - 242
3. http://www.youtube.com/watch?v=e05Muh8_UJM

Sider i alt: 12

(uden bilag)