Uden hjælpemidler

Opgave 1

$\det(\text{veka}, \text{vekb}) = 0$

$3 * 8 - (t * 2) = 0$

$24 - 2t = 0$

$24 = 2t$

$\frac{24}{2} = t$

$\mathbf{12 = t}$

Opgave 2

$d = b^2 - 4ac$

$d = (-10)^2 - 4 * 1 * 24$

$d = 100 - 96$

$d = 4$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

$x = \frac{10 \pm 2}{2}$

$\boldsymbol{x = 6}$ **og** $\boldsymbol{x = 4}$

Opgave 3

Siden |BC| bestemmes:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{5^2 - 3^2}$

$a = \sqrt{25 - 9}$

$a = \sqrt{16}$

$\mathrm{a} = 4$**,** (løsningen a= -4 er ikke en løsning, da en sidelængde ikke have en negativ værdi)

Dvs. |BC|=4

Siden |DF| bestemmes:

Forstørrelsesfaktor: $k = \frac{6}{3} = 2$

Siden |DF|= $5 \cdot 2 = \mathbf{10}$

Opgave 4

$F(x) = \int 3x^2 + 6x\,dx = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 6 \cdot \frac{1}{2}x^2 + k = x^3 + 3x^2 + k$

$F(x) = x^3 + 3x^2 + k$

$2 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + k$

$2 = 1 + 3 + k$

$2 - 4 = k$

$-2 = k$

$\boldsymbol{F(x) = x^3 + 3x^2 - 2}$

Opgave 5

$a = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$b = y - ax = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 6 = 1$

$\boldsymbol{f(x) = 3x + 1}$

Opgave 6

Differentiere ligningen og x bestemmes:

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \qquad , x > 0$

$\frac{1}{x} - 1 = 0$

$\frac{1}{x} = 1$

$x = \frac{1}{1} = 1$ → Toppunkt, dvs. Maksimum

x:	0,5	1	2
f'(x):	+	0	-
f(x):	↑		↓

SVAR: Dvs. at funktionen har maksimum i x=1, grafen er voksende i intervallet [0;1] og grafen er aftagende i intervallet [1;∞[

Med hjælpemidler

opg 7

I et koordinatsystem i planen er givet to punkter C(−1, 4) og P(2, 8).

a. Opskriv en ligning for den cirkel, der går gennem P og har centrum i C. Husk: IvekCPI=r

Bestemmer først vekCP: $\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ (Formel 35). Nu skal vi finde længden af denne vektor

for så får vi radius r: Vi leder nu efter IvekCPI (formel 31): $\sqrt{3^2+4^2} \blacktriangleright 5 = \mathrm{r}$

$(x+1)^2+(y-4)^2=25$ eller kan skrives som $x^2+2\cdot x+y^2-8\cdot y+17=25$

SVAR: Cirklen med centrum C(−1,4) og som går gennem P(2,8) har ligningen:

$(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{4})^2=25 \blacktriangleright x^2+2\cdot x+y^2-8\cdot y+17=25$

b. En linje i planen er givet ved parameterfremstillingen

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\15\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}x=t-3\\y=7\cdot t+15\end{bmatrix}$, t∈R

Bestem koordinatsættet til hvert af linjens skæringspunkter med cirklen

Der må gælde at både cirklens ligning og linjens parameterfremstilling skal være opfyldt!

Løses via solve hvor vi indskriver cirklens ligning og betingelserne for henholdsvis x og y i parameterfremstillingen:

$\mathrm{solve}\left((x+1)^2+(y-4)^2=25 \text{ and } \mathrm{x}=-3+1\mathrm{t} \text{ and } \mathrm{y}=15+7\mathrm{t}, \{x,y,t\}\right)$
$\blacktriangleright t=^-2 \text{ and } x=^-5 \text{ and } y=1 \text{ or } t=^-1 \text{ and } x=^-4 \text{ and } y=8$

SVAR:

Vi kan se på resultatet, at linjen og cirklen har to skæringspunkter og det er for forskellige værdier af t.

For t=−2 skærer de hinanden i S1(−5,1)

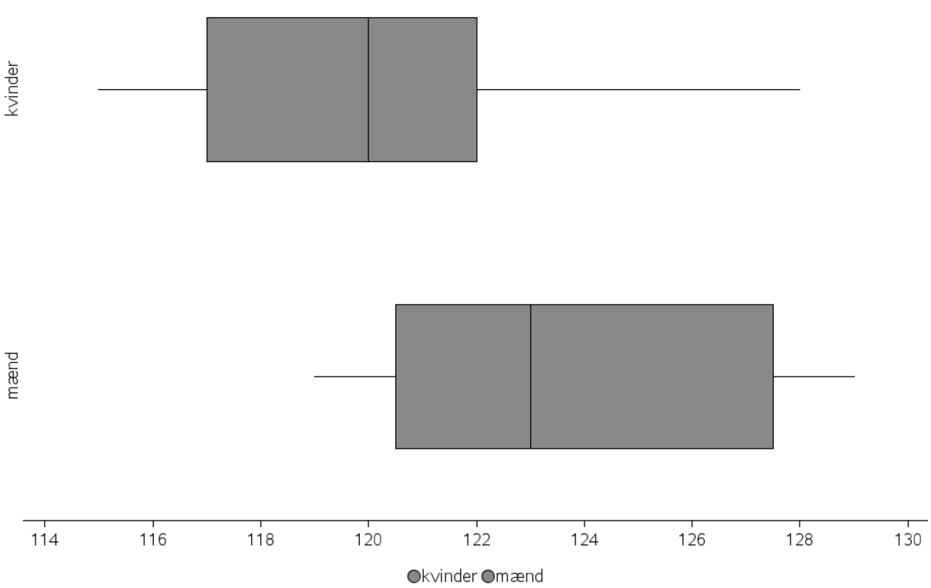
For t=−1 skærer det hinanden i S2(−4,8)

Skæringspunkterne for hver af linjens skæringspunktet med cirklen er S1(−5,1) og S2(−4,8)

Opgave 8

Boksplot

	A kvinder	B mænd	C
◆			
1	115	119	
2	117	119	
3	117	120	
4	120	120	
5	122	120	
6	122	121	
7	128	121	
8		122	
9		122	
10		123	
11		123	
12		123	
13		127	
14		127	
15		127	
16		128	
17		129	
18		129	
19		129	
20		129	



50 % af mændene har et blodtryk over 123, mens kun 25% af kvinderne har et blodtryk på over 122.

Spredningen for de 25% kvinder med det højeste blodtryk er stort, idet øvre kvartil er 122 og maksimum er 128.

Opg 9

Tabellen viser sammenhørende værdier af vægt (målt i kg) og hvilestofskiftet (målt i kcal/døgn) for forskellige pattedyr

vægt (kg)	0.3	2.4	6.4	13	29.3	51.8	59.6
hvilestofskiftet $(kcal/døgn)$	28	135	293	520	956	1394	1591

I en model er hvilestofskiftet f(x) (målt i kcal/døgn) som funktion af vægten x (målt i kg) af typen

$f(x)=b\cdot x^a$

a. bestem a og b

bestemms ved potensregression i "lister og regneark"

$a=\textbf{stat.b}$ ▸ $a=0.764626$

$b=\textbf{stat.a}$ ▸ $b=70.512$

Samlet hedder funktionen: $f(x):=70.512\cdot x^{0.764626}$ ▸ *Udført*

SVAR: a=0.764626 og b=70.512

A vægt	B hvilest...	C	D	E
				=PowerR
0.3	28		Titel	Potensre..
2.4	135		RegEqn	a*x^b
6.4	293		a	70.512
13	520		b	0.764626
29.3	956		r^2	0.999713
51.8	1394		r	0.999856
59.6	1591		Resid	{-0.0838..
			ResidTra..	{-0.0029..

b. benyt modellen til at bestemme hvilestofskiftet for et pattedyr, der vejer 20 kg.

indsætter mit x som er=20 i ligningen og mit f(x) er hvilestofskiftet:

$70.512 \cdot 20^{0.764626} \blacktriangleright 696.73$

$f(20) \blacktriangleright 696.73$

SVAR: hvilestofskiftet for et pattedyr der vejer 20 kg er 696.73 kcal/døgn

c. Bestem den procentvise ændring i hvilestofskiftet ved en vægtforøgelse på 15%.

y var vores hvilestofskifte og x var vægten. dvs. det er når x forøges med 15 %.

Vi skal finde vores fremskrivningsfaktor for $r=\frac{15}{100} \blacktriangleright r=0.15$ dvs. $f_x=0.15+1 \blacktriangleright f_x=1.15$

Bruger følgende formel: $f_y=f_x{}^a$

$f_y=(1.15)^{0.764626} \blacktriangleright f_y=1.11278$

Nu findes den procentvise stigning:

$1.11278-1 \blacktriangleright 0.11278$

$0.11278 \cdot 100 \blacktriangleright 11.278$

SVAR: dvs. at den procentvise ændring i hvilestofskriftet ved en vægtforøgelse på 15 %, vil den ændre sig med 11,28 %

Opgave 10

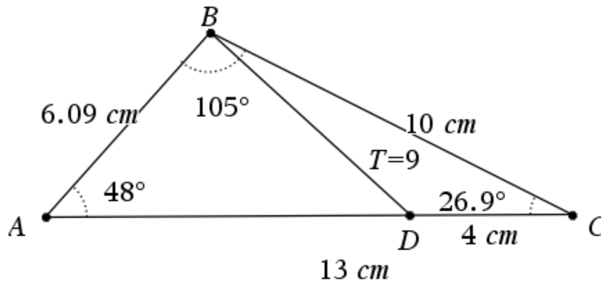
a. bestemmer siden ab:

$\text{solve}\left(10^2=13^2+c^2-2\cdot 13\cdot c\cdot \cos(48),c\right) \blacktriangleright c=6.11658 \text{ or } c=11.2808$

Man får at vide, at vinkel B er stump. Nedenfor bestemmes vinkel B for henholdsvis den ene eller den anden løsning.

$\cos^{-1}\left(\frac{10^2+(6.11658)^2-13^2}{2\cdot 10\cdot 6.11658}\right) \blacktriangleright 104.964$

$\cos^{-1}\left(\frac{10^2+(11.2808)^2-13^2}{2\cdot 10\cdot 11.2808}\right) \blacktriangleright 75.0361$



SVAR: Dvs. at siden AB er = 6.12

idet vinkel B således er stump

b. bestemer siden dc

Benytter formel 29: $T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin(C)$

Solver med hensyn til siden dc, da vi kender vores areal i ΔBCD som er 9:

$\text{solve}\left(9=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot dc\cdot \sin(27.036),dc\right) \blacktriangleright dc=3.95996$

SVAR: Dvs. at siden dc er 4,0

b. bestemer siden dc

Benytter formel 29: $T=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin(C)$

Solver med hensyn til siden dc, da vi kender vores areal i ΔBCD som er 9:

$\text{solve}\left(9=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot dc\cdot \sin(27.036),dc\right) \blacktriangleright dc=3.95996$

SVAR: Dvs. at siden dc er 4,0

Opgave 11

a. Der gøres rede for konstanterne a og b

SVAR:

a er fremskrivningsfaktoren og fortæller at CO2-udledningen vokser med 3,1% pr. år efter 1950.

(Udregning: $r=(a-1)\cdot 100 \Leftrightarrow r=(1.031-1)\cdot 100 \blacktriangleright r=3.1$%)

b: er vores startværdi og dermed den CO2-udledning der var i år 1950. Der blev altså udledt $60.297\cdot 10^9$ tons CO2 i år 1950.

b. Opstiller en model for den gennemsnitlige årlige udledning af CO2 pr. person

$g(t):=\frac{60.297\cdot 10^9\cdot (1.031)^t}{6.72\cdot 10^7\cdot t+2.594\cdot 10^9} \blacktriangleright \textit{Udført}$

SVAR: Dvs at modellen kommer til at hedde $g(t) \blacktriangleright \frac{897.277\cdot (1.031)^t}{t+38.6012}$, hvor g(t) beskriver den gennemsnitlige årlige CO2-udlednign pr. person (målt i tons), som funktion af tiden t (målt i år efter 1950)

Bestemmer den gennemsnitlige udledning af CO2 pr. person i 2012

$2012-1950 \blacktriangleright 62$

$g(62) \blacktriangleright 59.2053$

SVAR: Dvs. at den gennemsnitlige CO2-udledning pr. person i 2012 er 59,2 tons

Opgave 12

a)

En ligning for planen α, der indeholder sidefladen ODE.

Først bestemmes planens normalvektor ved at krydse **vektorod**$:=\begin{bmatrix}1\\8\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}1\\8\\0\end{bmatrix}$ og **vektoroe**$:=\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix}$:

$\mathrm{crossP}(\textbf{vektorod},\textbf{vektoroe}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}24\\-3\\-30\end{bmatrix}$ som forkortet med 3 bliver **normalvek_α**$:=\begin{bmatrix}8\\-1\\-10\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}8\\-1\\-10\end{bmatrix}$

Planens ligning opskrives ved andendelse af punktet (0,0,0):

$8\cdot(x-0)-1\cdot(y-0)-10\cdot(z-0)=0 \blacktriangleright 8\cdot x-y-10\cdot z=0$

b)

Afstande fra punktet F til sidefladen ODE beregnes:

$$dist(p,\alpha)=\frac{\mathrm{abs}(8\cdot(-1)-1\cdot 5-10\cdot 4+0)}{\mathrm{norm}(\textbf{normalvek\_α})} = 4.12604$$

c)

ABC er en del af en plan β med ligningen $5\cdot x+6\cdot y+7\cdot z=53 \blacktriangleright 5\cdot x+6\cdot y+7\cdot z=53$

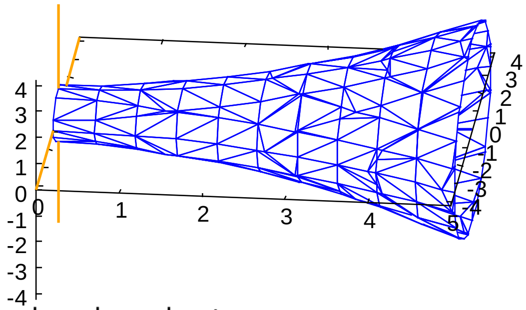
Den stumpe vinkel mellem sidefladen ODE og β ønskes bestemt.

HUSK at regne i grader IKKE radian.

$$\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}\left(\textbf{normalvek\_α},\begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}\right)}{\mathrm{norm}(\textbf{normalvek\_α})\cdot\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix}\right)}\right) \blacktriangleright 105.499$$

Opgave 13

Det flotte omdrejningslegeme er meget nemt tegnet i wordmat, og viser vasens ydre.



a)

$\mathbf{f}(x):=1+0.1\cdot x^2 \blacktriangleright$ *Udført*

Tangentlinjens ligning i punktet P(5,f(5))

$\mathrm{tangentLine}(\mathbf{f}(x),x,5) \blacktriangleright x-1.5$

b)

Førstekoordinaten for tangentlinjens skæringspunkt med x−aksen bestemmes:

$\mathrm{solve}(x-1.5=0,x) \blacktriangleright x=1.5$

Skålens lerrumfang beregnes ved hjælp af fomlen for omdrejningslegemer:

$$v=\pi\cdot\int_0^5 (\mathbf{f}(x))^2\,dx-\pi\cdot\int_{1.5}^{5}(x-1.5)^2\,dx \blacktriangleright v=16.6243$$

Opgave 14

En forskrift for rakettens fart $\mathbf{v}(t)$ ønskes bestemt.

$$\text{deSolve}\left(\mathbf{v}'-\frac{1}{15-t}\cdot\mathbf{v}=\frac{300}{15-t}-9.81 \text{ and } \mathbf{v}(0)=0|0\leq t\leq 14,t,\mathbf{v}\right) \blacktriangleright \mathbf{v}=\frac{-4.905\cdot t\cdot(t+31.1621)}{t-15}$$

$$\mathbf{v}(t):=\frac{-4.905\cdot t\cdot(t+31.1621)}{t-15}|0\leq t\leq 14 \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$\text{solve}(\mathbf{v}(t)=1000,t) \blacktriangleright t=12.3611$$

Efter 12,361 sekunder når rakettens fart op på 1000 m/s

Opgave 15

a)

Volumen af kilen er givet ved:

$$V=0.5\cdot x\cdot x\cdot h \blacktriangleright 0.5\cdot h\cdot x^2$$

Det oplyses at $V=100$ dvs. h udtrykt ved x er: $\text{solve}(0.5\cdot h\cdot x^2=100,h) \blacktriangleright h=\frac{200.}{x^2}$

Kilens overflade udtrykkes:

$$O=x^2+x\cdot h+x\cdot\sqrt{x^2+h^2}+2\cdot 0.5\cdot h\cdot x \blacktriangleright x\cdot\sqrt{x^2+h^2}+x^2+2\cdot h\cdot x$$

I udtrykket for O indsættes nu udtrykket for h:

$$\mathbf{o}(x):=x\cdot\sqrt{x^2+\left(\frac{200.}{x^2}\right)^2}+x^2+2\cdot\frac{200.}{x^2}\cdot x = x\cdot\sqrt{x^2+\left(\frac{40000}{x^4}\right)}+x^2+\frac{400.}{x}$$

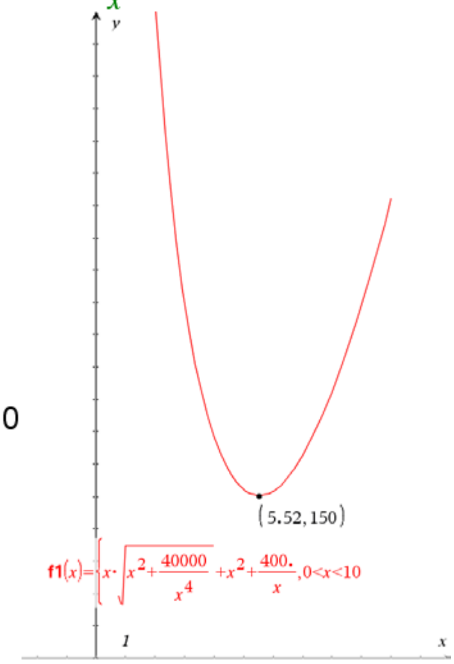
b)

X bestemmes, så kilens overflade bliver mindst muligt, idet 0<x<10

$$\textbf{omærke}(x):=\frac{d}{dx}\left(x\cdot\sqrt{x^2+\frac{40000}{x^4}}+x^2+\frac{400.}{x}\right)|0<x<10 \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$\text{solve}(\textbf{omærke}(x)=0,x) \blacktriangleright x=5.5204$$

$$\mathbf{o}(5.5204) \blacktriangleright 150.275$$



Af grafen for O(x) ses, at der er tale om et minimum for netop x=5,5204.

Dvs. at når x=5,52 cm bliver kilens overflade mindst mulig.

Tak Astrid, CC og Ricky.

Skriv endelig til FriViden@gmail.com hvis der er fejl i løsningen.