Uden hjælpemidler

Opgave 1 Lineær funktion

Lineær model gældende i perioden 2004-2010:

$$y = 82 \cdot x + 765$$

hvor x er antal år efter 2004 og y er det samlede elforbrug til fjernsyn i Danmark.

Opgave 2 Tangentlinjens ligning

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 8$$

Tangentlinjens ligning i punktet $\mathrm{P}\big(2, \mathrm{f}(2)\big)$bestemmes:

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 12$$

Funktionen differentieres for at finde tangethældningen i punktet P:

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x - 4 = 6 \cdot x - 4$$

$$f'(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 8$$

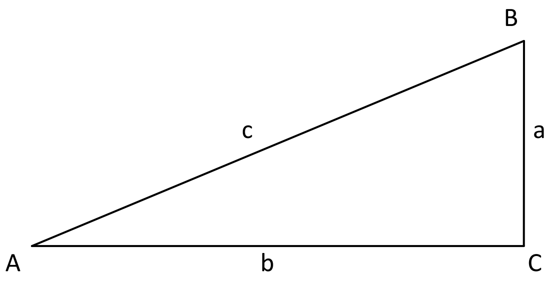
Tangentlinjens ligning har forskriften $y = a \cdot x + b$ og nu bestemmes b ud fra punktet

$\mathrm{P}\big(2, \mathrm{f}(2)\big) = \mathrm{P}(2{,}12)$ idet $b = y - a \cdot x = 12 - 8 \cdot 2 = -4$

Dvs. tangentlinjens ligning er $\boldsymbol{y = 8 \cdot x - 4}$

Opgave 3 Trigonometri

WordMat's trekantsløser anvendes med input: C = 90° , a = 5 , b = 12



a = 5
b = 12
c = 13

Længden af siden c = IABI findes vha. pythagoras

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

Dvs. længden af kanten AB=13

Det oplyses, at IADI=18. Dvs. forstørrelsesfaktoren mellem de to trekanter er $F = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Siden EB førstørres vha. forstørrelsesfaktoren op til siden DC: IDCI=5 $\cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$

Dvs. længden af beholderens øverste kan er IFCI=15

Opgave 4 Cirkler i planen

En cirkel er bestemt ved $x^2 + 2 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y = 4$

Denne omskrives: $(x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Heraf ses, at radius er 3 og at cirklen har centrum i punktet (-1,2)

Opgave 5 Integrale ved substitution

$$\int \frac{4x}{2x^2+3} dx$$

Det ses, at der er tale om division af to funktioner, og at integralet derfor skal løses ved hjælp integration ved substitution. Man leder her altid efter at den ene funktion differentieret giver den anden.

Det ses her, at hvis nævneren differentieres, så fås tælleren. Man vælger derfor nævneren som hjælpefunktion

$$u = 2x^2 + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 4x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{4x}$$

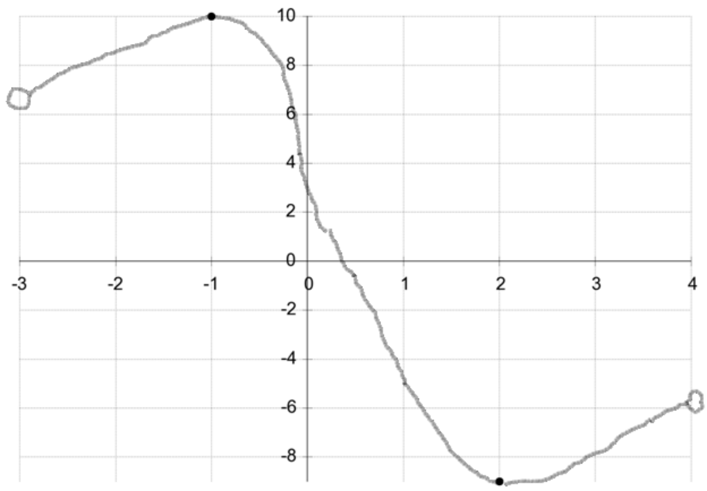
Nu udføres substitutionen i integralet, hvor u og dx ovenfor indsættes:

$$\int \frac{4x}{u}\frac{du}{4x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{u} du \Leftrightarrow \ln(u) + k$$

Herefter substitueres tilbage: $\int \frac{4x}{2x^2+3} dx = \mathbf{\ln(2x^2+3)+k}$

Opgave 6 Monotoniforhold

OK det blev lidt sjusket :-)

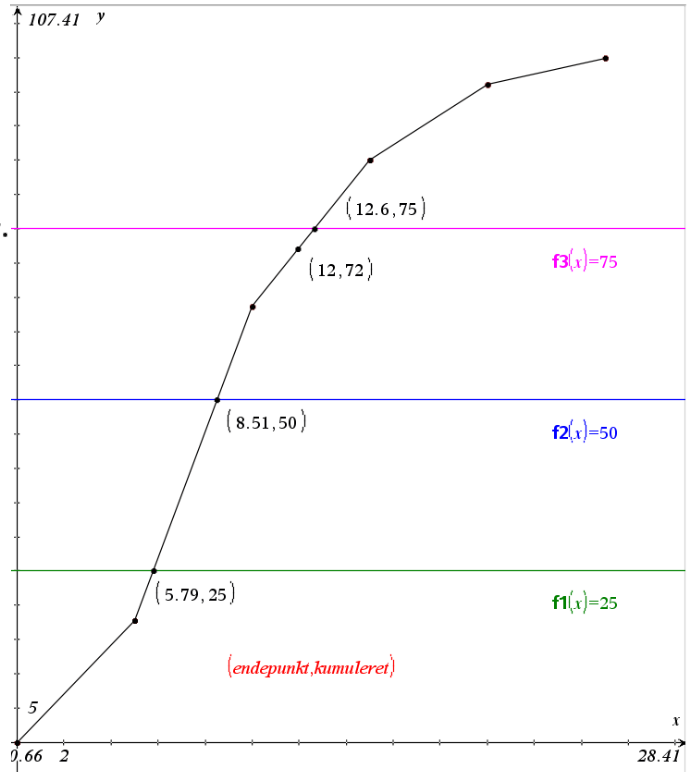


Opgave 7 Sumkurve

Tabellen viser fordelingen af fravær i procent for en skoles 570 elever.

a) Sumkurven tegnes

b) Bestem kvartilsættet, og bestem hvor stor en procentdel af skolens elever, der har over 12% fravær.



	antal	endepunkt	frekvens	kumuleret
			=antal/(sum(antal))*100.	=cumulativesum(frekvens)
0	0	0	0.	0.
0–5	101	5	17.7193	17.7193
5–10	262	10	45.9649	63.6842
10–15	122	15	21.4035	85.0877
15–20	63	20	11.0526	96.1404
20–25	22	25	3.85965	100.

Bestemmer kvartilsæt:

Nedre kvartil: 5,79

median: 8,51

Øvre kvartil: 12,6

Procentdelen af elever, der har over 12% fravær:

Aflæst punkt: (12,72)

Dvs. at 72% af eleverne har 12% fravær eller derunder, så de resterende må have over 12%

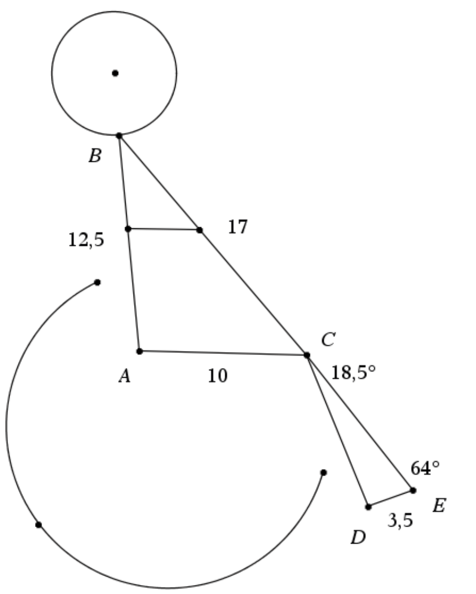
$100-72=28$

Ca. 28% af eleverne har over 12% fravær

Opgave 8 Trigonometri

På figuren ses en model af et handicappiktogram.

I trekant ABC er |AB|=12,5, |AC|=10 og |BC|=17. Alle mål er i cm.



a) Bestem ∠A i trekant ABC

$$\angle A=\cos^{-1}\left(\frac{(12.5)^2+10^2-17^2}{2\cdot 12.5\cdot 10}\right)=97.5274$$

∠A er ca. 97,53°

Det oplyses yderligere, at ∠ECD=18,5°, |DE|=3,5 og ∠DEC=64°

b) Bestem |CD|,

$$|CD|=\frac{3.5}{\sin(18.5)}\cdot\sin(64)=9.91407$$

|CD| er ca. 9,91 cm.

Opgave 9 Eksponentiel regression

I tabellen ses sammenhørende værdier af tiden og den årlige globale mobile datatrafik for årene 2008−2011.
I en model kan den årlige globale mobile datatrafik beskrives ved en funktion af typen

$m(t)=b\cdot a^t$

hvor m(t) betegner den årlige globale mobile datatrafik (målt i exabyte) til tidspunktet t (målt i år efter 2008).

A årstal	B trafik	C	D
			=ExpReg('
0	0.48	Titel	Ekspone...
1	1.08	RegEqn	a*b^x
2	2.84	a	0.461942
3	7.16	b	2.47794
		r²	0.998739
		r	0.999369
		Resid	{0.01805...
		ResidTra...	{0.03834...

a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b.

a of b er bestemt ved eksponentiel regression

a=**stat.b** $= 2.47794$

b=**stat.a** $= 0.461942$

$\mathbf{f}(x) = 0.461942\cdot(2.47794)^x$

b) Benyt modellen til at bestemme den årlige globale mobile datatrafik i 2014 samt den årlige vækstrate for den årlige globale mobile datatrafik.

Bestemmer den årlige globale mobile datatrafik i 2014

$\mathbf{f}(6) = 106.938$

Den årlige globale mobile datatrafik bliver ifølge modellen ca. 106,94 exabyte

Bestemmer den årlige vækstrate:

$(\mathbf{stat.b}-1)\cdot 100 = 147.794$

Dvs. den årlige vækstrate ca. er 147,79%

c) Benyt modellen til at bestemme fordoblingstiden, og gør rede for hvad dette tal fortæller om den årlige globale mobile datatrafik.

$$\frac{\ln(2)}{\ln(\mathbf{stat.b})} = 0.763859$$

Fordoblingstiden er ca. 0,76, hvilket betyder, at den årlige mobile datatrafik fordobles på 0,76 år.

Opgave 10 Vektorer i rummet

a)

Den plan der indeholder frontfladens ligning er $^-25\cdot x+16\cdot z=0 \blacktriangleright 16\cdot z-25\cdot x=0$

Heraf aflæses planens normalvektor **normalvek_oade**$:=\begin{bmatrix}^-25\\0\\16\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}^-25\\0\\16\end{bmatrix}$

Den spidse vinkel mellem endefladen OAB og frontfladen bestemmes.

Først bestemmes normalvektoren for planen der indeholder OAB,

idet **vektor_oa**$:=\begin{bmatrix}80\\^-50\\125\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}80\\^-50\\125\end{bmatrix}$ og **vektor_ob**$:=\begin{bmatrix}0\\0\\150\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0\\0\\150\end{bmatrix}$

$\mathrm{crossP}(\mathbf{vektor\_oa},\mathbf{vektor\_ob}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}^-7500\\^-12000\\0\end{bmatrix}$

Største fælles divisor bestemmes $\gcd(-7500,-12000) \blacktriangleright 1500$, dvs. **normalvek_oab**$:=\begin{bmatrix} \frac{-7500}{1500} \\ \frac{-12000}{1500} \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem de to planer:

$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\textbf{normalvek\_oab},\textbf{normalvek\_oade})}{\text{norm}(\textbf{normalvek\_oab})\cdot\text{norm}(\textbf{normalvek\_oade})}\right) \blacktriangleright 63.4869$(husk grader ikke radian)

b) Arealet af frontfladen.

Man kan løse opgaven på to måder.

MAn kan dele frontfladen op i to trekenter AOD og EDO.

Arealet af de to parallogrammer udspændt af henholdsvis AD,AO og EO,ED beregnes, men det er kun det halve areal der udgør henholdsvis trekant AOD og EDO.

vek_ao$:=\begin{bmatrix} -80 \\ 50 \\ -125 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -80 \\ 50 \\ -125 \end{bmatrix}$ **vek_ad**$:=\begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix}$ **vek_eo**$:=\begin{bmatrix} 0 \\ -300 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 0 \\ -300 \\ 0 \end{bmatrix}$ **vek_ed**$:=\begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 125 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 125 \end{bmatrix}$

Areal trekant AOD+ Areal trekant EDO:

$0.5\cdot\text{norm}(\text{crossP}(\textbf{vek\_ao},\textbf{vek\_ad}))+0.5\cdot\text{norm}(\text{crossP}(\textbf{vek\_eo},\textbf{vek\_ed})) \blacktriangleright 51942.9$

Altså er frontfladens areal ca. 5,2 m^2

Man kan også se på figuren som en trapez.

Det oplyses, at glasudhænget er symmetrisk, og det ses af koordinaterne, at vektor AD og vektor OE er parallelle. Man skal altså finde arealet af en trapez $A=0.5\cdot h\cdot(a+b)$

Længden af vektor AD: $\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 80-80 \\ 350--50 \\ 125-125 \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright 400$

Længden af vektor OE: $\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 0-0 \\ 300-0 \\ 0-0 \end{bmatrix}\right) \blacktriangleright 300$

Højden i trapezen beregnes som afstanden fra A til linjen som udgøres af OE:

$$dist(A,linjenOE) = \frac{\text{norm}\left(\text{crossP}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 80-0 \\ -50-0 \\ 125-0 \end{bmatrix}\right)\right)}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{bmatrix}\right)} \blacktriangleright 5\cdot\sqrt{881} = 148.408$$

Formlen for Arealet af et trapez benyttes: $a=0.5\cdot 5\cdot\sqrt{881}\cdot(400+300) \blacktriangleright a=51942.9\,cm^2 \approx \frac{51942.9}{10000} \blacktriangleright 5.19429\,m^2$

Altså er frontfladens areal ca. 5,2 m^2

c)

Skæring mellem spottets strålelinje og frontfladens plan:

$\text{solve}(-25\cdot x+16\cdot z=0 \text{ and } x=16\cdot t \text{ and } y=60\cdot t \text{ and } z=150-25\cdot t,x,y,t) \blacktriangleright x=48 \text{ and } t=3 \text{ and } y=180 \text{ and } z=75$

Altså skærer strålen frontfladen i punktet (48,180,75)

Opgave 11 Regression andengradspolynomium

På figuren i opgavearket ses en skitse af en bro i USA. Broens bue er parabelformet med en spændvidde på 320 feet og en buehøjde på 120 feet, som vist på modellen ovenfor.

a) Indlæg figuren i et passende koordinatsystem, og bestem en ligning for den parabel, der følger broens bue.

Da det er en parabel er funktionen $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Jeg vil have at parablen har sit toppunkt i 2−aksen så den ligeså spejler sig i 2−aksen. Deraf ved jeg at

$f(0)=120$

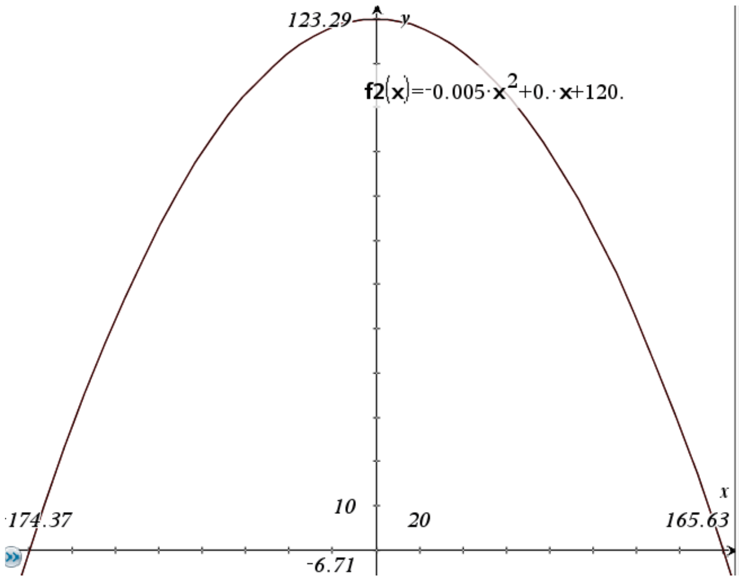
og da spændvidden er 320 må løsningen på ligningen

$f(x)=0$ være $x=-160 \vee 160$ da $\frac{320}{2}=160$

Herefter benyttes andengradsregression.

Heraf fås $f(x)=-0{,}005x^2+120$

	A x	B y	C	D
◆				=QuadReg('x,'y,1)
1	0	120	Titel	Andengradsregre...
2	-160	0	RegEqn	a*x^2+b*x+c
3	160	0	a	-0.004688
4			b	0.
5			c	120.
6			R^2	1.
7			Resid	{0.,0.,0.}



Opgave 12 Integralregning

I forbindelse med en crash−test kan førerdukkens deceleration beskrives ved funktionen

$$\mathbf{a}(t):=\frac{16400}{(t-68)^2+400}+\frac{1480}{(t-93)^2+18}\Big|0\le t\le 140$$

hvor a(t) betegner førerdukkens deceleration (målt i m/s^2) til tidspunktet t (målt i ms).

a) Tegn grafen for a, og bestem førerdukkens største deceleration.

Bestemmer a'(t):

$$\mathbf{am}(t):=\frac{d}{dt}\left(\frac{16400}{(t-68)^2+400}+\frac{1480}{(t-93)^2+18}\right)$$

$$\mathbf{am}(t)=\frac{^{-}32800\cdot(t-68)}{\left(t^2-136\cdot t+5024\right)^2}-\frac{2960\cdot(t-93)}{\left(t^2-186\cdot t+8667\right)^2}$$

Bestemmer t når a'(t)=0

$\text{solve}(\mathbf{am}(t)=0,t)$ ▸ $t=68.9852$ or $t=80.8793$ or $t=92.9141$

Bestemmer værdierne til de tre ekstrema

$\mathbf{a}(68.9852)=43.3894$

$\mathbf{a}(80.8793)=37.9561$

$\mathbf{a}(92.9141)=98.2557$ (størst værdi)

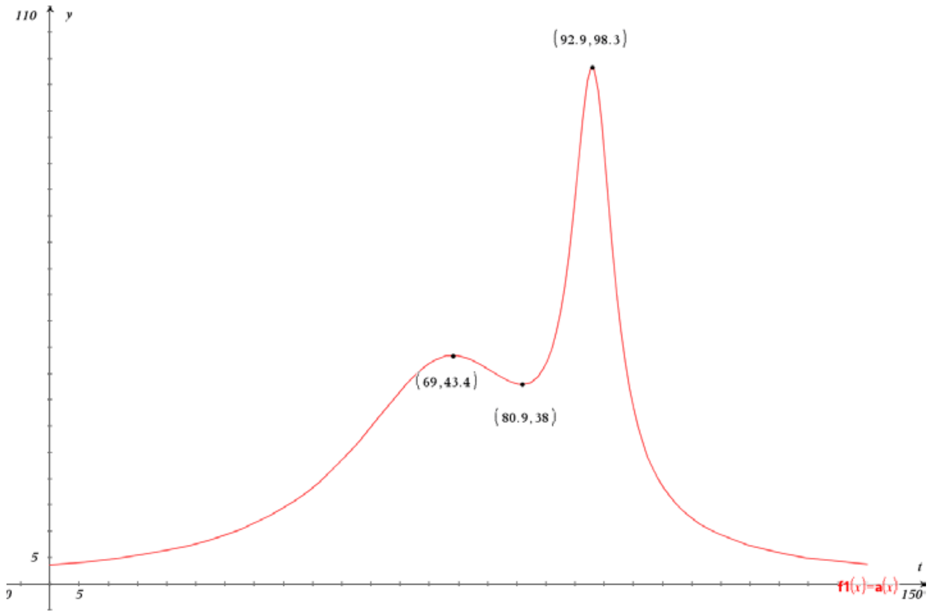
Dvs. at førerdukkens største decelaration er efter ca. 92,91 ms hvor den er ca. 98,26 m/s2

Som et mål for, hvor voldsomt førerens hoved påvirkes af crash´et, anvendes værdien Severity Index (SI),

som er bestemt ved $SI=\int_0^T (\mathbf{a}(t))^{2.5}\,dt$, hvor T er tiden (målt i ms).

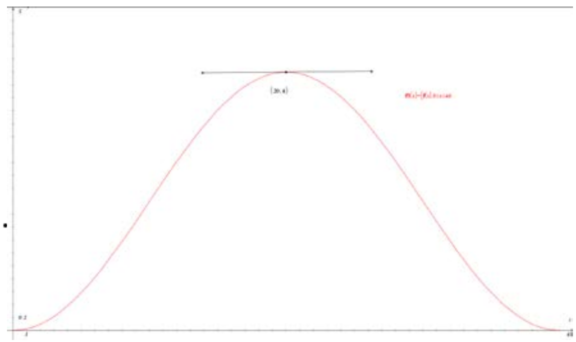
b) Bestem SI, når T=140 ms: $\int_0^{140} (\mathbf{a}(t))^{2.5}\,dt=982848.$

Når T=140 ms. så er SI ca. 982848



Opgave 13 Omdrejningslegemer

En funktion f er givet ved $\mathbf{f}(x) := 2 \cdot \sin(0.05 \cdot \pi \cdot x - 0.5 \cdot \pi) + 2$



a) Se tegning af grafen for f i intervallet [0;40].

I en model kan bicepsmusklen hos en bestemt person beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for f drejes 360° omkring førsteaksen i intervallet [0;40].

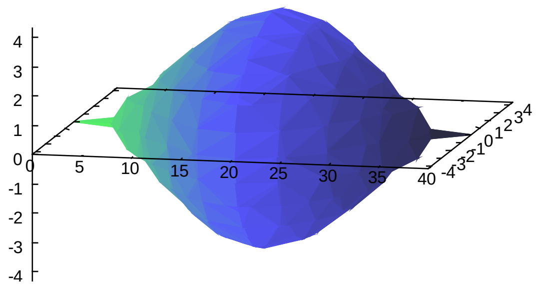
b) Bestem bicepsmusklens volumen.

$$\pi \cdot \int_0^{40} (\mathbf{f}(x))^2 \, dx = 753.982$$

Volumen af bicepsmusklen er ca. 753,98

Styrken i bicepsmusklen er proportional med musklens maksimale tværsnitsareal.

c) Bestem bicepsmusklens maksimale tværsnitsareal.



Bestemmer f'(x):

$$\mathbf{fm}(x) := \frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$$

$$\mathbf{fm}(x) = 0.314159 \cdot \sin(0.15708 \cdot x)$$

Bestemmer x når f'(x)=0:

$$\text{solve}(\mathbf{fm}(x)=0, x) \blacktriangleright x = 20. \cdot \mathbf{n18}$$

Konstanten betyder at der er uendeligt mange toppunkter, men da funktionen er defineret i intervallet [0;40] er n18=1

Bestemmer radius:

$$\mathbf{f}(20) = 4.$$

Bestemmer det maksimale tværsnitsareal som arealet af en cirkel med radius 4:

$$4^2 \cdot \pi = 50.2655$$

Bicepsmusklens maksimale tværsnitsareal er ca. 50.27

Opgave 14 Differentialligning

I en model er en persons vægt som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = \frac{k}{7000} - \frac{42}{7000} \cdot m$$

hvor m(t) er personens vægt (målt i kg) til tidspunktet t (målt i døgn),

og k er personens kostindtag (målt i kcal/døgn).

En bestemt person vejer 85 kg og indtager 3300 kcal/døgn.

a) Hvad er væksthastigheden for denne persons vægt?

$$\frac{3300}{7000}-\frac{42}{7000}\cdot 85 = {}^{-}0.038571$$

Personens vægt aftager med ca. 0.039 kg pr. døgn

Om en anden person oplyses, at personen vejer 87 kg til tidspunktet t =0 .

b) Bestem personens vægt udtrykt ved t og k.

$$\text{deSolve}\left(m'=\frac{k}{7000}-\frac{42}{7000}\cdot m \text{ and } m(0)=87,t,m\right) ▸ m=\left(87-\frac{k}{42}\right)\cdot e^{\frac{-3\cdot t}{500}}+\frac{k}{42}$$

c) Bestem k, så personen vejer 80 kg efter 100 døgn.

$$\text{solve}\left(80=\left(87-\frac{k}{42}\right)\cdot e^{\frac{-3\cdot 100}{500}}+\frac{k}{42},k\right) ▸ k=3002.39$$

Skriv endelig til FriViden@gmail.com hvis der er fejl i løsningerne.