Uden hjælpemidler

Opgave 1 Reducering

$$(p+q)^2-(p^2-q^2)-2pq$$

$$p^2+q^2+2pq-p^2+q^2-2pq$$

$$2q^2$$

Opgave 2 Andengradsligning

Andengradsligningen $x^2+x-30=0$ løses:

$$d=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot(-30)=1+120=121$$

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{d}}{2a}=\frac{-1\mp 11}{2\cdot 1}\Leftrightarrow x=5\ og\ x=-6$$

Opgave 3 Vektor regning

Arealet af parallelogram: A=Idet(**a**,**b**) I = $3\cdot 5-2\cdot(-2)=15+4=19$

Opgave 4 Differentialregning

F(x)=$x^6\cdot e^x+3$ er stamfunktion til $f_2(x)$

fordi *F(x)* differentieret giver $f_2(x)$

F(x) differentieres ved hjælp af produktreglen: *F'(x)*=$f(x)=\ 6x^5\cdot e^x+x^6\cdot e^x$

Opgave 5 Potensfunktion

A er grafen for g da grafen er voksende og a>1

B er grafen for h da grafen er voksende og 0<a<1

C er grafen for f da grafen er aftagende og a=-2

Opgave 6

$$f(x)=ax^3+bx^2$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx$$

Det vides, at grafen for *f* går gennem (2,2) og at dette punkt er et ekstremumspunkt, dvs. *f'(2)=0*

$$f(2)=a\cdot 2^3+b\cdot 2^2=2\qquad\Leftrightarrow\qquad 8a+4b=2$$

$$\text{og}\ \ f'(2)=3a2^2+2b2=0\qquad\Leftrightarrow 12a+4b=0$$

To ligninger med to ubekendte løses ved samme koefficienters metode: $4a=-2\ \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$

herefter bestemmes b: $b=\frac{-12a}{4}=-3a=-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ Dvs. $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2$

Med hjælpemidler

Opgave 7 Boksplot

Til højre ses kvartilsættene.
Det ses af boksplottene, at 2011 er forskudt til højre i forhold til 2007.
Det ses ligeledes af den beregnede forskel i kolonne D her til højre.
Det betyder altså, at vi beskattes hårdere i 2011 end i 2007, selvom man af boksplottene ikke kan se, hvorvidt nogle kommuner har sat skatten op, mens andre kommuner har sat skatten ned.

	A	B	C	D
2		**2007**	**2011**	**Forskel**
3	*Mindste*	22.32	22.8	0.48
4	*Nedre*	24.25	24.8	0.55
5	*Median*	24.8	25.32	0.52
6	*Øvre*	25.33	25.71	0.38
7	*Største*	26.7	27.8	1.1

Det ses af boksplottene at 75% af kommunerne i 2007 havde en personbeskatningsprocent på 25,33 eller derunder, mens kun 50% af kommunerne i 2011 havde en personbeskatningsprocent på 25.32 eller derunder.

Måske bør man også bemærke maksimumsværdien 27,8 i år 2011. Der er altså kommuner, der i 2011 opkræver en meget høj personskat, hvilket ses ved, at forskellen mellem størstværdierne (1,1) er steget mere end forskellen for kvartilsættene.

Opgave 8 Vektorer i planen

a)

Linjens ligning ønskes bestemt. Først bestemmes retningsvektoren $\begin{bmatrix} 5-1 \\ 3-1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Forkortes med 2 fås retningsvektoren for linjen l altså: **ret_vek_l**$:=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Normalvektoren findes ved tværvektoren: **normal_vek_l**$:=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Dvs. linjens ligning: $-(x-1)+2\cdot(y-1)=0 \blacktriangleright -x+2\cdot y-1=0$

b)

En parabel er defineret ved $\mathbf{f2}(x)=x^2-8\cdot x+13.5 \blacktriangleright \text{true}$

Toppunktet bestemmes: $\frac{d}{dx}(\mathbf{f2}(x)) \blacktriangleright 2.\cdot x-8.$ $\text{solve}(2.\cdot x-8=0,x) \blacktriangleright x=4$. $\mathbf{f2}(4) \blacktriangleright -2.5$

Dvs. Toppunktet er (4;−2,5)

Forskriften for linjen fra før omskrives: $\text{solve}(-x+2\cdot y-1=0,y) \blacktriangleright y=\frac{x+1}{2}$. Graferne tegnes.

Afstand fra linjen til parablens toppunkt T: $dist(T,l)=\frac{|-1\cdot 4+2\cdot -2.5-1|}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)} \blacktriangleright 4.47214$

c)

Projektionen af toppunktet på l ønskes bestemt.

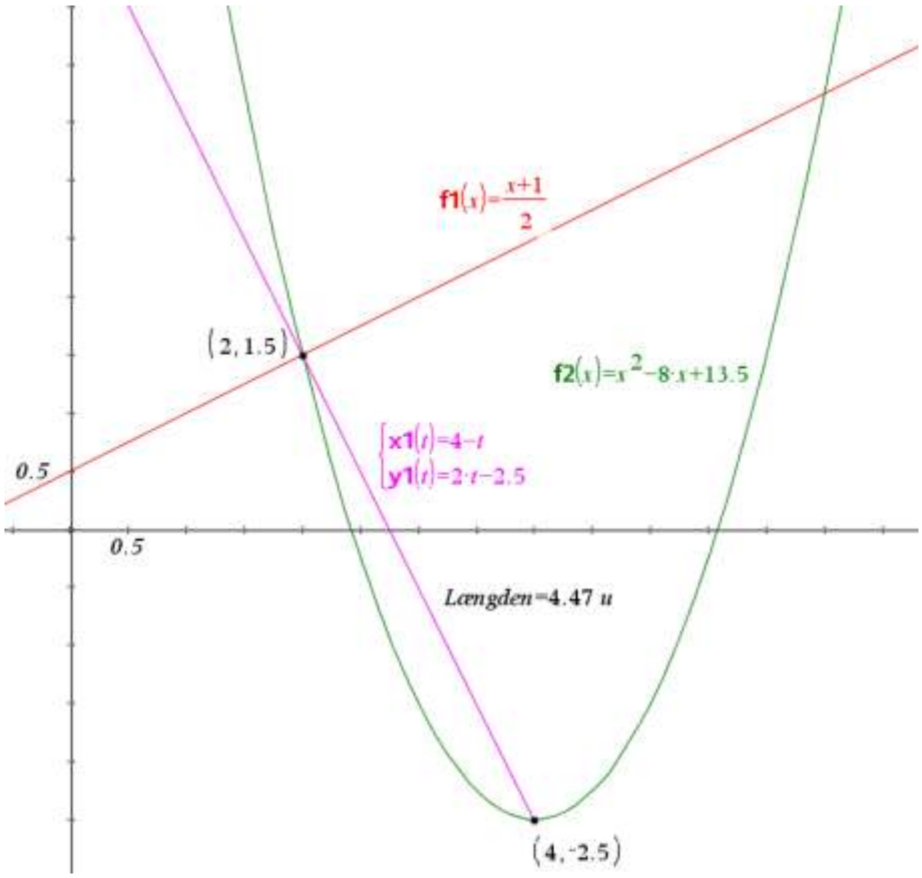
Opgaven opfattes som skæring mellem to linjer. Først bestemmes parameterfremstillingen for linjen fra Toppunktet vinkelret på linjen l, som jeg vælger at kalde linje m:

Retningsvektoren for m er lig normalvektoren for l, dvs. **ret_vek_m**$:=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Nu kan m's parameterfremstilling opskrives: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -2.5 \end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} x=4-t \\ y=2\cdot t-2.5 \end{bmatrix}$

Skæringspunktet bestemmes: solve$(x=4-t$ and $y=2\cdot t-2.5$ and $-x+2\cdot y-1=0,x,y,t)$ ▸ $x=2.$ and $t=2.$ and $y=1.5$

Heraf fås, at projektionen af toppunktet på *l* er: (2;1,5)



Opgave 9 Trigonometri

a)

Cosinusrelationerne benyttes til at bestemme vinkel ACB:

$$\cos^{-1}\left(\frac{(12.8)^2+28^2-(22.4)^2}{2\cdot 12.8\cdot 28}\right) ▸ 51.5141$$

Arealet af trekant ABC ønskes beregnet.

Først bestemmes højden fra B på siden AC, altså siden BD:

$BD=12.8\cdot\sin(51.5141)$ ▸ 10.0193

$A=0.5\cdot h\cdot g$ dvs. $a=0.5\cdot 10.0193\cdot 28$ ▸ $a=140.27$

Trekantens areal er altså 140,3

b)

Linjestykket *DE* ønskes bestemt.

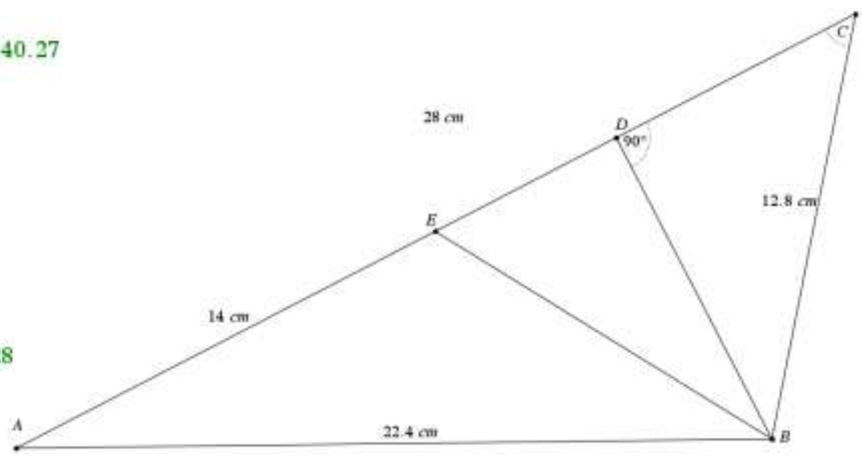
Linjestykket *EC*=14

Linjestykket *DC* kan nemt bestemmes:

$DC=12.8\cdot\cos(51.5141)$ ▸ 7.96572

Dvs. $ED=EC-DC=14-7.96572$ ▸ 6.03428

Dvs. længden *DE* = 6,03



Opgave 10 Potensfunktion

a)

Potens regression

a=**stat.b** ▸ 0.739526

b=**stat.a** ▸ 1153.81

f1(x) ▸ $1153.81 \cdot x^{0.739526}$

A m	B v	C	D
◆			=PowerRe
1 0.025	72.85	Titel	Potensre...
2 0.314	529.4	RegEqn	a*x^b
3 3.5	2751	a	1153.81
4 11.4	7079.4	b	0.739526
5		r^2	0.999114
6		r	0.999557
7		Resid	{-2.5497...
8		ResidTra...	{-0.0344...

b)

f1(70) ▸ 26707.4

Dvs. for et forsøgsdyr på 70 kg renses blodplasmaet for medicin med en hastighed på $26707 \cdot mL/h$

Massen for et forsøgsdyr, hvor blodplasmaet renses med en hastighed på 5000 mL/h bestemmes:

solve$(5000=$**f1**$(x),x)$ ▸ $x=7.26341$

Disse forsøgsdyr vejer altså ca. 7,3 kg

c)

Her menes den procentvise ændring da det er en potensfunktion.

Når massen øges med 20% er fremskrivningsfaktoren F_m=1,20.

Fremskrivningsfaktoren for F_v beregnes ved denne sammenhæng:

$F_v = F_m{}^a = (1.2)^{\textbf{stat.b}}$ ▸ 1.14434

Heraf fås altså at **den procentvise ændring i v er 14,4 %, når massen stiger med 20%.**

Opgave 11 Vektorer i rummet

a)

En ligning for planen α indeholdende sidefladen ABCD ønskes bestemt.

Normalvektoren bestemmes som krydsproduktet mellem de to vektorer

Vektor AB = **vek_ab**:= $\begin{bmatrix} 8-11 \\ 26-{}^-1 \\ 12-3 \end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix} -3 \\ 27 \\ 9 \end{bmatrix}$

og vektor AD=**vek_ad**:= $\begin{bmatrix} 12-11 \\ 0-1 \\ 0-3 \end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

crossP(**vek_ab**,**vek_ad**) ▸ $\begin{bmatrix} -90 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}$ forkortes med 30 fås **normal_vek_α**:= $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Planen α's ligning $-3\cdot(x-11)+0-(z-3)=0$ ▸ $-3\cdot x-z+36=0$

b)

Planen β indeholder endefladen BCEF og er bestemt ved ligningen $3y-z=66$

dvs. β's normalvektor er **normal_vek_β**:= $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vinklen mellem α og β besemmes.

$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\textbf{normal\_vek\_α},\textbf{normal\_vek\_β})}{\text{norm}(\textbf{normal\_vek\_α})\cdot\text{norm}(\textbf{normal\_vek\_β})}\right)$ ▸ 84.2608 c)

Arealet af fladen ABCD ønskes bestemt.
Formlen for arealet af et parallelogram benyttes, idet arealet opdeles i to trekanter.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |vek\_AD \times vek\_AB| + \frac{1}{2} \cdot |vek\_CD \times vek\_CB|$$

vek_cd:= $\begin{bmatrix} 12-12 \\ 0-22 \\ 0-0 \end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix} 0 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix}$ og **vek_cb**:= $\begin{bmatrix} 8-12 \\ 26-22 \\ 12-0 \end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

A=0.5·norm(crossP(**vek_ad**,**vek_ab**))+0.5·norm(crossP(**vek_cd**,**vek_cb**)) ▸ 186.574

Dvs. Arealet af sidefladen ABCD er ca. 187

Opgave 12 Differentialligninger

a)

deSolve$\left(s'=1.5-\frac{2}{100+t}\cdot s \text{ and } s(0)=30,t,s\right)$ ▸ $s=\frac{0.5\cdot(t^3+300.\cdot t^2+30000.\cdot t+600000.)}{(t+100)^2}$

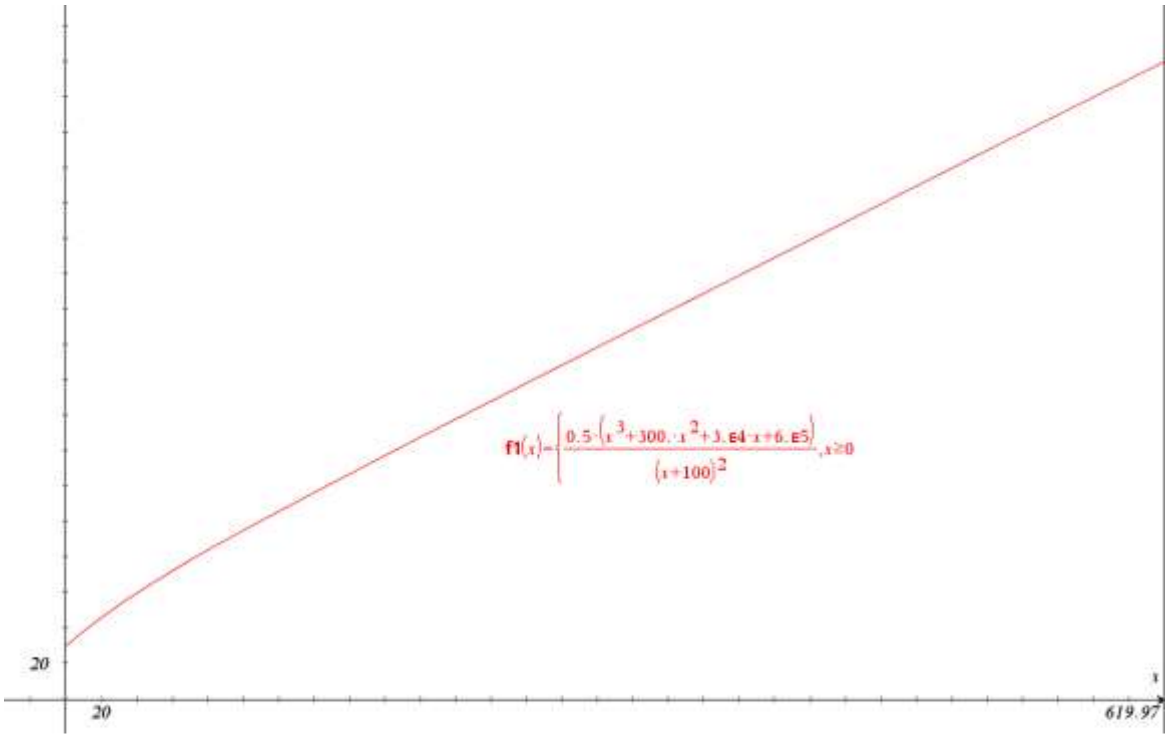
$s(t):=\frac{0.5\cdot(t^3+300.\cdot t^2+30000.\cdot t+600000.)}{(t+100)^2}$ ▸ *Udført*

b)

solve$(s(t)=60,t)$ ▸ $t=40.3163$

Heraf fås, at efter godt 40 minutter, så er der 60 kg salt i karret.

P.S Uheldigt at koncentrationen faktisk vokser mod uendelig, men det har ingen betydning for denne besvarelse :-)



Opgave 13 Omdrejningslegeme

a)

En funktion er givet ved

$f(x):=6.5\cdot\sin(0.0849\cdot x)+6$ ▸ *Udført*

Pas på, her er en opgave hvor man har med en sinusfunktion at gøre,

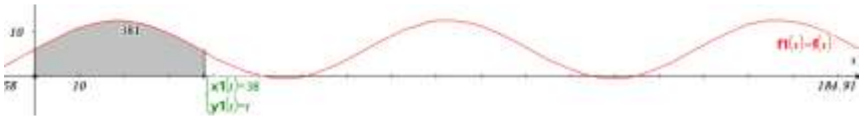
derfor er det vigtigt at regne i Radian.

Linjen med ligningen x=38 tegnes idet linjen har parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} ▸ \begin{bmatrix}x=38\\y=t\end{bmatrix}$$

Arealet af M:

$$\int_0^{38} f(x)\,dx ▸ 380.847$$

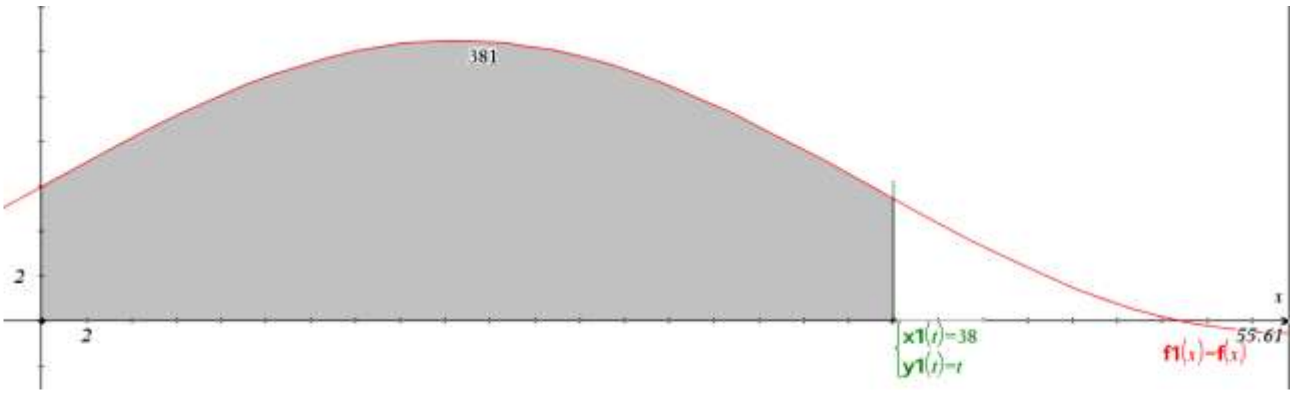


b)

Overfladearealet

$$O=2\cdot\pi\cdot\int_0^{38}\left(f(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}\right)dx ▸ 2545.64$$

Altså er lampens overfladeareal ca. 2546 cm^2



Opgave 14 Optimering

a) Beholderens volumen udtrykt ved r og h:

$$V=2r\cdot 2r\cdot h+0{,}5\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot r^3=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3+4\cdot h\cdot r^2$$

b) h udtrykt ved r idet volumen er 5:

$\text{solve}\left(\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3+4\cdot h\cdot r^2=5,h\right) \blacktriangleright h=\frac{-(2\cdot\pi\cdot r^3-15)}{12\cdot r^2}$

Overfladen af beholderen:

Først beregnes overfladen af kassen idet cirklen for oven trækkes fra:

$4\cdot 2\cdot r\cdot h+2\cdot 2\cdot r\cdot 2\cdot r-\pi\cdot r\cdot r \blacktriangleright (8-\pi)\cdot r^2+8\cdot h\cdot r$

Derefter overfladen af halvkuglen: $0.5\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 \blacktriangleright 2\cdot\pi\cdot r^2$

Disse to arealer adderes og udtrykket for h indsættes:

$(8-\pi)\cdot r^2+8\cdot h\cdot r+2\cdot\pi\cdot r^2 = (8-\pi)\cdot r^2+8\cdot\frac{-(2\cdot\pi\cdot r^3-15)}{12\cdot r^2}\cdot r+2\cdot\pi\cdot r^2 \blacktriangleright \frac{-((\pi-24)\cdot r^3-30)}{3\cdot r}$

$= \frac{-\pi\cdot r^2}{3}+8\cdot r^2+\frac{10}{r} = \left(\frac{10}{r}+\left(8-\frac{\pi}{3}\right)r^2\right)$

Noget nemmere i wordmat med komandoen ALT O:

$$(8-\pi)\cdot r^2+8\cdot\frac{-(2\cdot\pi\cdot r^3-15)}{12\cdot r^2}\cdot r+2\cdot\ \pi\cdot r^2$$

Udtrykket omskrives vha. CAS-værktøjet WordMat ved brug af metoderne: Automatisk reduktion,

$$-\pi\cdot\frac{r^2}{3}+8\cdot r^2+\frac{10}{r}$$

c) r bestemmes, så overfladearealet bliver mindst muligt idet 0<r<50:

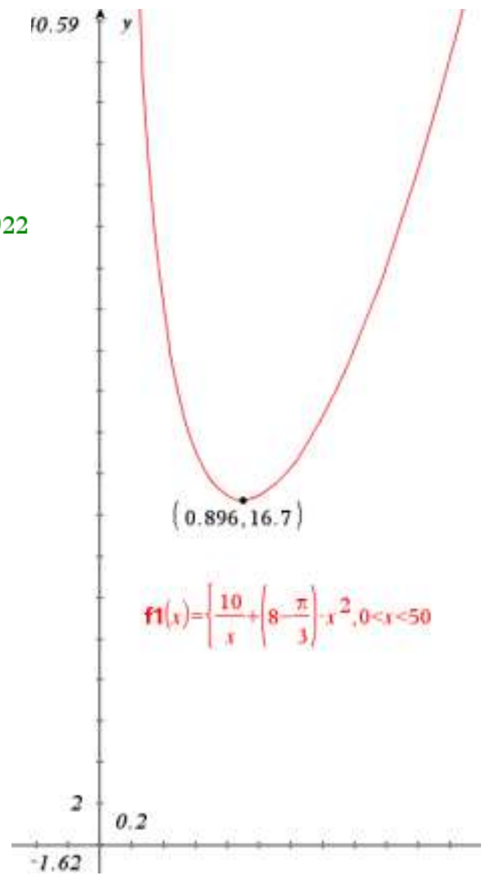
$\mathbf{o}(r):=\frac{10}{r}+\left(8-\frac{\pi}{3}\right)\cdot r^2 \blacktriangleright \textit{Udført}$

$\frac{d}{dr}(\mathbf{o}(r)) \blacktriangleright \frac{-2\cdot(\pi-24)\cdot r}{3}-\frac{10}{r^2}$

Ekstrema bestemmes: $\text{solve}\left(\frac{-2\cdot(\pi-24)\cdot r}{3}-\frac{10}{r^2}=0,r\right) \blacktriangleright r=0.895922$

Af grafen ses, at der er tale om et minimum.

Når r = 0,896 bliver overfladearealet mindst muligt.



P.S Der er en fejl i opgaven.
Højden i beholderen bør naturligvis være > 0 dvs.

$\text{solve}\left(\frac{-(2\cdot\pi\cdot r^3-15)}{12\cdot r^2}>0,r\right) \blacktriangleright r\neq 0 \text{ and } r<1.3365$

og definitionsmængden for r er derfor 0<r<1,337, hvilket altså slet ikke passer sammen med opgavens definitionsmængde 0<r<50.

Skriv endelig til FriViden@gmail.com hvis der er fejl i løsningerne.