Opgave 1

$(a-b)(a+b)-2a^2+b^2 \;=\; a^2-b^2-2a^2+b^2 \;=\; a^2-2a^2 \;=\; -\boldsymbol{a^2}$

Opgave 2

Skæringspunktet er der hvor begge ligninger er opfyldt, derfor løses to ligninger med to ubekendt ved hjælp af samme koefficienters metode, hvor den nederste ligning ganges med 2:

$$2x-3y=1$$
$$2x+12y=16$$

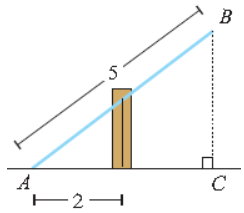
Den øverste ligning trækkes fra den nederste: $15y=15 \;\Leftrightarrow\; y=1$

Herefter bestemmes x ved indsættelse af $y=1$ i ligningen $x+6y=8$:

$x+6=8 \;\Leftrightarrow\; x=2$. Dvs. skæringspunktet har koordinatsættet: **(2,1)**

Opgave 3

Højden af fastgørelsespunktet beregnes vha. Pythagoras:



$$2{,}5^2=2^2+h^2$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for h vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$h=-1{,}5 \quad \vee \quad h=1{,}5$$

Her kan naturligvis kun den positive løsning bruges. Herefter benyttes ensvinklede trekanter:

Forstørrelsesfaktor $k=\frac{5}{2{,}5}=2.$

Højden CB bestemmes nu: $2\cdot 1{,}5 \;=3$. Altså er punktet B **3 meter** over jorden.

Opgave 4

Én løsning betyder at deskriminanten *d*=0. Dvs.

$$d=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 3\cdot c=0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for c vha. CAS-værktøjet WordMat.* $\boldsymbol{c=\frac{1}{3}}$

Opgave 5

Først differentieres funktionen: *f '(x)* = $(x+1)e^x+e^x$. Indsættes i differentialligningen:

$$(x+1)e^x+e^x=(x+1)\cdot e^x+\frac{(x+1)\cdot e^x}{x+1}$$
$$(x+1)e^x+e^x=\;(x+1)e^x+e^x$$

Dvs. f(x) er en løsning til differentialligningen.

Opgave 6

f er voksende, dernæst aftagende, og igen voksende.

Den afledede funktion skal derfor være positiv, dernæst negativ, og igen positiv.

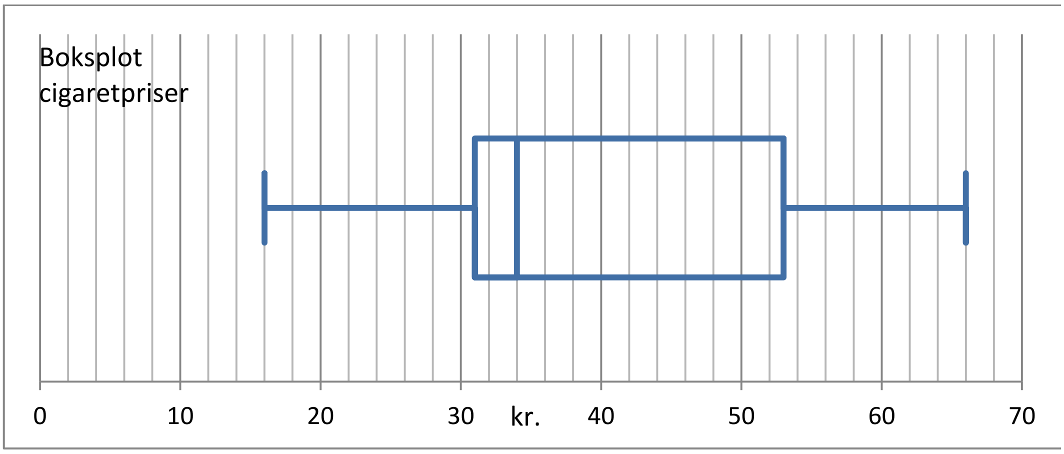
Det er gældende for den røde graf, g, der er den afledede funktion til *f*.

Opgave 7

Her benyttes det gratis program wordmat, som kan downloades www.eduap.com

Jeg aflæser kvartilsæt ved at tælle mig frem:

Kvartilsæt	
Mindste	16
Nedre	31
Median	34
Øvre	53
Største	66



Opgave 8

En funktion f er bestemt ved

$f(x):=(x^3-8)\cdot\ln(x)$, x>0.

a) Løs ligningen f(x)=0.

$\text{solve}(f(x)=0,x)$ ▸ $x=1 \text{ or } x=2$

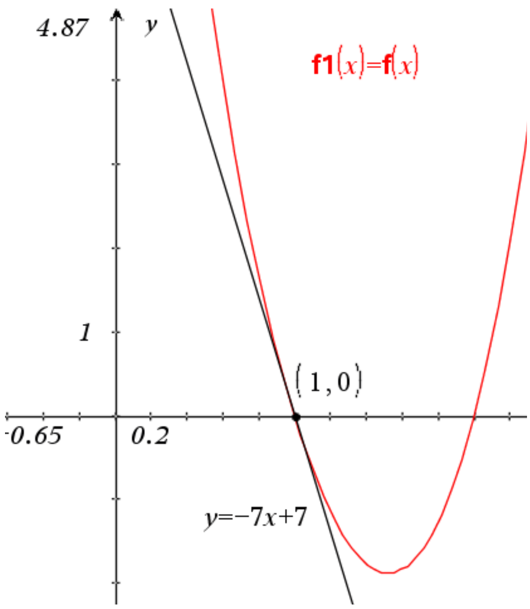
Man kunne også have brugt nulreglen og løst den i hånden.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P(1,f(1)).

$\text{tangentLine}(f(x),x,1)$ ▸ $7-7\cdot x$

Tangentens ligning:

$y=-7x+7$



Opgave 9

Tabellen viser antallet af Facebook–brugere i hele verden for en række år i perioden 2004-2010.

I en model antages det, at udviklingen i antallet af Facebook–brugere i verden kan beskrives ved en funktion af typen

$f(t)=b\cdot a^t$

hvor f(t) betegner antallet af Facebook–brugere i verden (målt i mio.) t år efter 2004.

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b.

Bestemmer a og b vha. eksponentiel regression

a = **stat.b** = 2.87489

b = **stat.a** = 1.39385

b) Bestem fordoblingstiden.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(\textbf{stat.b})} = 0.656381$$

Antallet af Facebook–brugere i verden fordobles efter ca. 0,66 år

c) Benyt modellen til at beregne antallet af Facebook–brugere i 2008, og gør rede for, hvad tallet a fortæller om udviklingen i antallet af Facebook–brugere.

Bestemmer antallet af Facebook–brugere i 2008.

$f(4) = 95.2133$

I 2008 var der ca. 95,2 mio. Facebook–brugere.

Gør rede for tallet a.

Tallet a er vores fremskrivningsfaktor der fortæller os om den procentvise ændring.

$(\textbf{stat.b}-1)\cdot 100 = 187.489$

Dvs. at antallet af Facebook–brugere stiger med ca. 187,49%

om året.

A år	B antal	C	D
			=ExpReg('
0	1	Titel	Ekspone…
1	5.5	RegEqn…	a*b^x
2	12	a	1.39385
5	350	b	2.87489
6	600	r²	0.988549
		r	0.994258
		Resid	{-0.3938…
		ResidTr…	{-0.3320…

Opgave 10

I trekant ABC er punktet D skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinjen for vinkel B og siden AC.

a) Bestem ∠B i trekant ABD vha. cosinusrelationerne.

$\cos^{-1}\left(\frac{5^2+11^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 11}\right) = 28.1375$ dvs. **∠B er ca. 28,14°**

b) Bestem ∠A i trekant ABC, og bestem |AC|.

Bestemmer ∠A.

$\cos^{-1}\left(\frac{7^2+11^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 11}\right) = 19.6851$ dvs. **∠A er ca. 19,69°**

Bestemmer ∠C.

$180-2\cdot 28.1375-19.6851 = 104.04$

Bestemmer |AC| vha. sinusrelationerne.

$\text{solve}\left(\frac{b}{\sin(2\cdot 28.1375)}=\frac{11}{\sin(104.04)},b\right) \blacktriangleright b=9.43055$ dvs. **|AC| er ca. 9,43**

Opgave 11

a)

Afstanden fra cirklens centrum til linjen l ønskes bestemt.

Cirklens centrum aflæses af ligningen til C(2,−1)

Afstanden fra punkt C til linjen l besemmes:

$dist(C,l)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot -1-7|}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)} \blacktriangleright 1$

b)

Koordinatsættet mellem linjen m og cirklen ønskes bestemt.

Først bestemmes linjen m´s parameterfremstilling:

Linjens retningsvektor er den samme som linjen l´s normalvektor $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

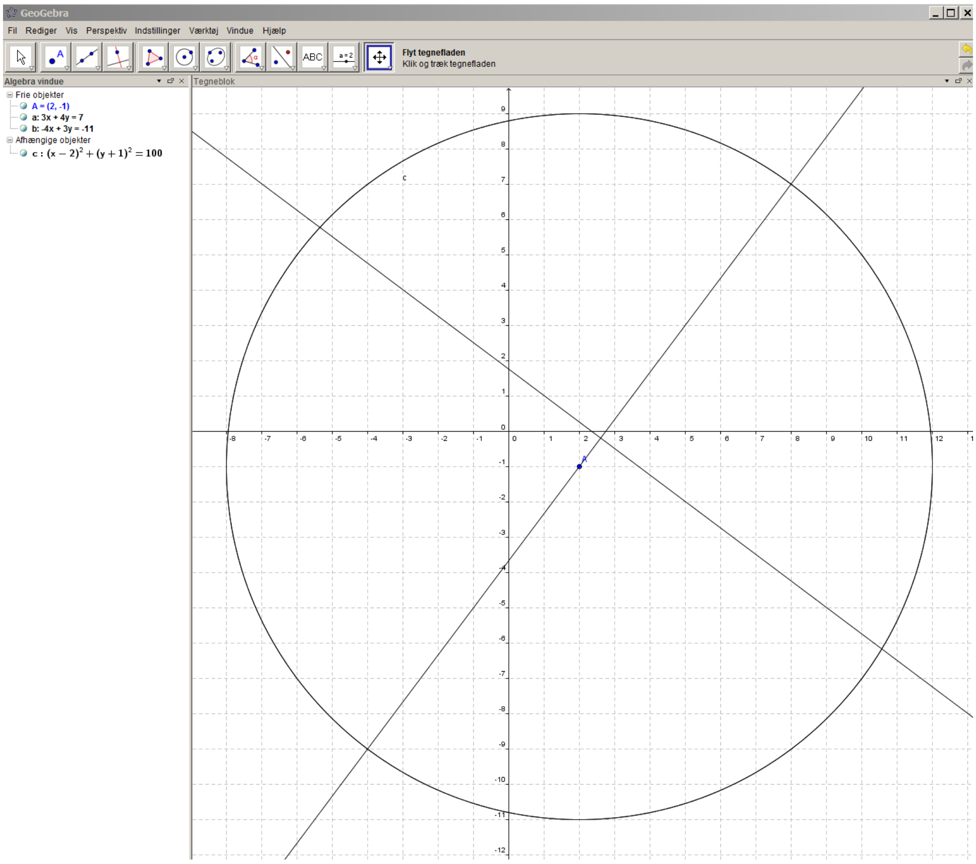
Punktet C er et punkt på linjen m. Dvs.

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}x=3\cdot s+2\\y=4\cdot s-1\end{bmatrix}$

Skæringspunkterne bestemmes:

$\text{solve}\left(x=3\cdot s+2 \text{ and } y=4\cdot s-1 \text{ and } (x-2)^2+(y+1)^2=100,x,y,s\right) \blacktriangleright x=-4 \text{ and } s=-2 \text{ and } y=-9 \text{ or } x=8 \text{ and } s=2 \text{ and } y=7$

Dvs. skæringspunkterne er **(−4,−9) og (8,7)**

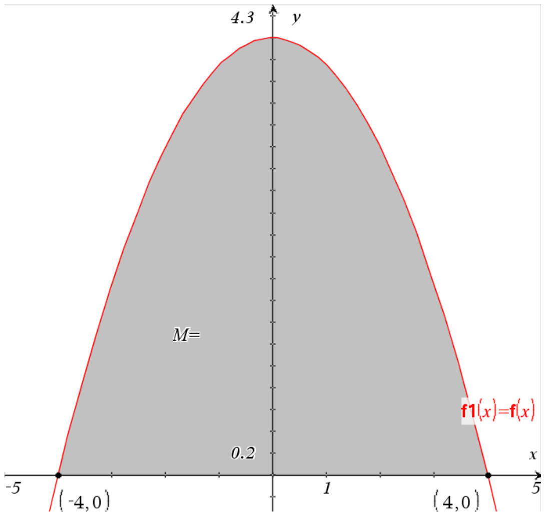


Opgave 12

En funktion f er givet ved

$$f(x):=4-\frac{x^2}{4}$$

Grafen for f og førsteaksen afgrænser i første og anden kvadrant en punktmængde M, der har et areal.



a) Bestem arealet af M.

Bestemmer nulpunkter.

$\text{solve}(f(x)=0,x) \blacktriangleright x=-4 \text{ or } x=4$

Bestemmer arealet M.

$$\int_{-4}^{4} f(x)\, dx = 21.3333$$

Arealet af M er ca. 21,3

Fra punktmængden M er der udskåret et rektangel.

b) Bestem arealet af det skraverede område på figur 2 udtrykt ved x.

Arealet af M på figur 2 må svare til arealet af M på figur 1 minus arealet af rektanglet som må være $2x\cdot f(x)$

$$\int_{-4}^{4} f(x)\, dx-2\cdot x\cdot f(x) = \frac{x^3}{2}-8\cdot x+\frac{64}{3}$$

Opgave 13

a)

En ligning for planen bestemmes.

Først bestemmes en normalvektor til planen ved at krydse to vektorer der ligger i planen:

$$\mathbf{vekab}:=\begin{bmatrix}52-106\\109-141\\0-68\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-54\\-32\\-68\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{vekac}:=\begin{bmatrix}25-106\\117-141\\0-68\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-81\\-24\\-68\end{bmatrix}$$ dvs. $\mathrm{crossP}(\mathbf{vekab},\mathbf{vekac}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}544\\1836\\-1296\end{bmatrix}$

Dette er en normalvektor til planen α, men jeg bruger nu kommandoen gcd (greatest common devisor = største fælles devisor) til at forkorte normalvektoren $\gcd(544,1836) \blacktriangleright 68$ og $\gcd(68,1296) \blacktriangleright 4$

Dvs. vektoren kan forkortes med 4: $\mathbf{norm\alpha}:=\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}544\\1836\\-1296\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}136\\459\\-324\end{bmatrix}$

Ved hjælp af punktet B og normalvektoren normα fås altså ligningen for planen α:

$$136\cdot(x-52)+459\cdot(y-109)-324\cdot(z-0)=0 \blacktriangleright 136\cdot x+459\cdot y-324\cdot z-57103=0$$

b)

Vinklen,v, mellem de to plan bestemmes ved at beregne vinkelen mellem de to plans normalvektorer.

Normalvektoren til β aflæses til $\mathbf{norm\beta}:=\begin{bmatrix}326\\75\\-135\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}326\\75\\-135\end{bmatrix}$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{norm\alpha},\mathbf{norm\beta})}{\mathrm{norm}(\mathbf{norm\alpha})\cdot\mathrm{norm}(\mathbf{norm\beta})}\right) \blacktriangleright 54.0224$$ (Huske at regne i grader og ikke i Radian)

c) Hvis to vektorer er parallelle så er krydsproduktet lig med nulvektoren.

$$\mathbf{vekae}:=\begin{bmatrix}65-106\\169-141\\85-68\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-41\\28\\17\end{bmatrix}$$ og $\mathbf{vekgi}:=\begin{bmatrix}47-87\\37-25\\103-85\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-40\\12\\18\end{bmatrix}$

$\mathrm{crossP}(\mathbf{vekae},\mathbf{vekgi}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}300\\58\\628\end{bmatrix}$ hvilket IKKE er nulvektoren. Derfor er de to vektorer IKKE parallelle.

Det er ikke muligt at beregne opgavens anden del, hvor man bliver bedt om at bestemme arealet.

For at kunne bestemme arealet kræver det, at det er en plan flade. Det er det desværre ikke.

Det vises ved først at definere de tre vektorer der udspænder fladen (med A som udgangspunkt):

$\textbf{vekai}:=\begin{bmatrix}47-106\\37-141\\103-68\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-59\\-104\\35\end{bmatrix}$ og $\textbf{vekag}:=\begin{bmatrix}87-106\\25-141\\85-68\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-19\\-116\\17\end{bmatrix}$ og **vekae**

Herefter findes normalvektoren til planen der udspændes af vekag og vekae:

$\textbf{normae\_ag}:=\text{crossP}(\textbf{vekae},\textbf{vekag}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}2448\\374\\5288\end{bmatrix}$.

Nu skulle det gerne vise sig, at denne normalvektor til denne plan

er vinkelret på vekai. Hvis det er tilfældet, vil prikproduktet være nul:

$\text{dotP}(\textbf{vekai},\textbf{normae\_ag}) \blacktriangleright 1752$

Da prikproduktet ikke er nul er vektorerne altså ikke ortogonale, og det er altså ikke en plan flade.

Arealet bestemmes derfor ikke.

Opgave 14

I en model kan udviklingen i et barns højde de første 48 måneder beskrives ved

differentialligningen

$\frac{dh}{dt}=5.24-0.045\cdot\textbf{h}$, $0 \le t \le 48$

hvor t er barnets alder (målt i måneder), og h er barnets højde (målt i cm).

I modellen er et barn 50 cm højt ved fødslen.

a)

Benyt modellen til at bestemme væksthastigheden, når barnet er 100 cm højt.

$5.24-0.045\cdot100 = 0.74$

Når barnet er 100 cm. så vokser det med 0,74 cm pr. måned.

b)

Bestem en forskrift for h, og benyt denne til at bestemme barnets alder, når det er 100 cm højt.

Bestemmer forskrift for h.

$\text{deSolve}(\textbf{h}'=5.24-0.045\cdot\textbf{h} \text{ and } \textbf{h}(0)=50,t,\textbf{h}) \blacktriangleright \textbf{h}=116.444-66.4444\cdot(0.955997)^t$

$\textbf{h}(t):=116.444-66.4444\cdot(0.955997)^t$

hvor t er barnets alder (målt i måneder), og h er barnets højde (målt i cm).

Bestemmer barnets alder når det er 100 cm. højt.

$\text{solve}(\textbf{h}(t)=100,t) \blacktriangleright t=31.0309$

Når barnet er 100 cm. højt så er det ca. 31 måneder gammelt.

Opgave 15

En funktion f er givet ved

$$f(x):=19\cdot\frac{\sqrt{-x^2+100\cdot x+14400}}{65}$$, $0 \leq x \leq 180$

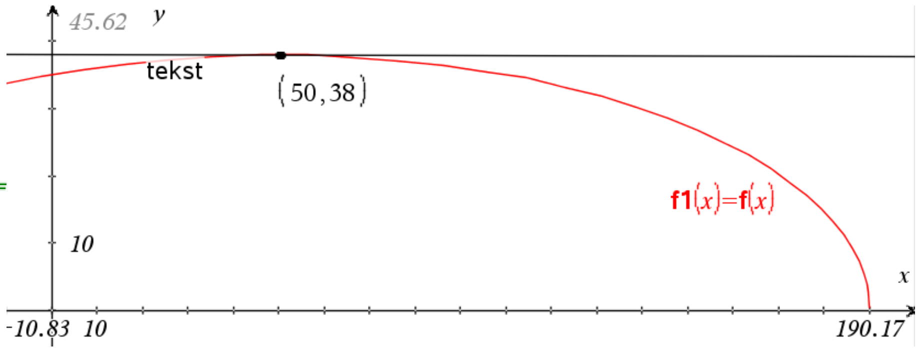
Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant en punktmængde M. Bemærk, at førsteaksen er lodret på figuren. Billedet viser en cigarformet bygning. I en model har bygningen form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen, og enheden på akserne er meter.

a) Bestem maksimum for f, og benyt dette til at bestemme bredden af bygningen, der hvor den er bredest.

Bestemmer f'(x).

$$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$$

$$fm(x)=\frac{-19\cdot(x-50)}{65\cdot\sqrt{-x^2+100\cdot x+14400}}$$



Bestemmer maksimum.

$\text{solve}(fm(x)=0,x) \blacktriangleright x=50$

Bestemmer radius.

$f(50)=38$

Dvs. at bygningen er bredest i 50 meters højde, hvor den har en radius på 38 meter (diameter = 76 meter).

b) Benyt modellen til at bestemme bygningens volumen.

$$\pi\cdot\int_0^{180}(f(x))^2\,dx=608798.$$

Bygningens volumen er ca. 608798 m^3