① Toppunkt : $y = 2x^2 - 8x + 3$

$y' = 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ } Toppunkt $(x,y) = (2,-8)$

$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 3 = -\cancel{8}5$

② $y = 499 \cdot x + 250$ hvor x er antal m^3 gas til levering og y er prisen.

③ $\int_1^2 6x^2 - 2x \, dx = \left[6\tfrac{1}{3}x^3 - 2\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \left[2x^3 - x^2\right]_1^2$

$= (2 \cdot 2^3 - 2^2) - (2 \cdot 1^3 - 1^2)$

$= 16 - 4 - 2 + 1 = \underline{\underline{11}}$

④
A: $g(x) = 0{,}5^x$ fordi aftagende eksponentiel funktion.

B: $f(x) = 2^x$ } Begge voksende funktioner. Grafen med

C: $h(x) = 1{,}2^x$ } det største grundtal vokser hurtigst.

⑤ $F = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$

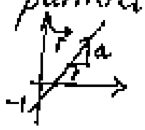
$|CE| = F \cdot |AC| = \frac{6}{5} \cdot 40 = 6 \cdot 8 = 48$

$|BE| = |CE| - 30 = 48 - 30 = \underline{\underline{18}}$

⑥ Cirklens ligning : $(x-1)^2 + (y-0) = 8$

$x^2 + 1 - 2x + y^2 = 8$

Linjens parameterfremstilling : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}$

(idet man fra linjens ligning $y = x - 1$ kender punktet $(0,-1)$ og retningsvektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da )

Skæringspunkterne bestemmes ved at indsætte $x = t$ og $y = t - 1$ i cirklens ligning:

$t^2 + 1 - 2t + (t-1)^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 + 1 - 2t + t^2 + 1 - 2t = 8$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 4t - 6 = 0 \quad | \quad d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \quad | \quad t = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$t = 3$ indsættes i parameterfremstillingen for linjen og skæringspunktet $\underline{(x,y) = (3,2)}$. $t = -1$ indsættes. Skæringspunkt $\underline{(x,y) = (-1,-2)}$

Opgave 7

v_a$:=\begin{bmatrix}5 & -10\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}5 & -10\end{bmatrix}$

v_b$:=\begin{bmatrix}6 & 8\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}6 & 8\end{bmatrix}$

a)

Projektion af **v_a** på **v_b**: $a_b = \dfrac{\text{dotP}(\mathbf{v\_a},\mathbf{v\_b})}{(\text{norm}(\mathbf{v\_b}))^2} \cdot \mathbf{v\_b} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-3 & -4\end{bmatrix}$

Dvs. koordinatsættet til projektionen af **v_a** på **v_b** er $\begin{bmatrix}-3 \\ -4\end{bmatrix}$

b)

Arealet af parallelogrammet udspændt af **v_a** og **v_b**:

$A = |\,\mathbf{v\_a} \times \mathbf{v\_b}\,| = \text{norm}(\text{crossP}(\mathbf{v\_a},\mathbf{v\_b})) \blacktriangleright 100$

Opgave 8

a)

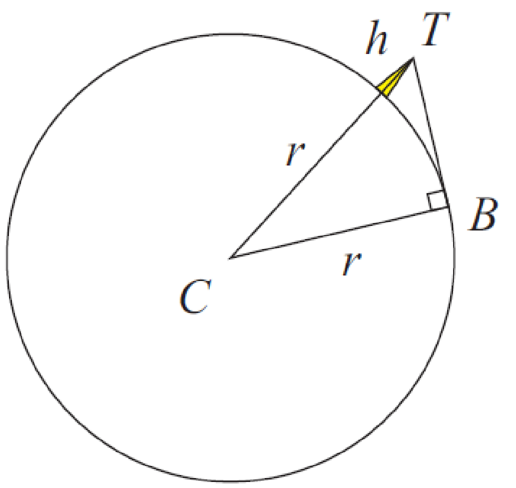
Der er tale om en retvinklet trekant. Vinkel C beregnes:

$C = \cos^{-1}\left(\dfrac{r}{r+h}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{6371}{6371+0.828}\right) \blacktriangleright 0.923688$ grader

b)

Ved hjælp af Pythagoras fås:

$|TB| = \sqrt{(6371+0.828)^2 - 6371^2} \blacktriangleright 102.718$



Størrelsesforholdene på figuren er ikke korrekte.

Opgave 9

a) Forskrift for antallet af bedrifter som funktion af tiden t (antal år efter 1975) bestemmes vha. eksponentiel regression til:

N(t) = **f1**(x) ▸ $65375.2\cdot(0.923589)^{x}$

hvor N(t) er antal bedrifter og x er antal år efter 1975 – gældende i perioden 1975–2008.

b) Halveringstiden for M(t) bestemmes

$$T_{½}=\frac{\log_{10}(0.5)}{\log_{10}(0.98)} ▸ 34.3096$$

Dvs. i løbet af ca. 34 år halveres antallet af malkekøer i årene mellem 1975–2008.

c) G(t) beskriver det gennemsnitlige antal malkekøer per bedrift i perioden 1975–2008.

G(t) = M(t)/N(t)

Dvs: G(t) = **g**$(x):=\frac{1106\cdot(0.98)^{x}}{\mathbf{f1}(x)}$ ▸ *Udført*

G(t) = **g**(x) ▸ $0.016918\cdot(1.06108)^{x}$

Heraf fås at den årlige procentvise stigning i det gennemsnitlige antal malkekøer per bedrift i perioden 1975–2008 er (1,06108−1=) **6,1 %**

	A t	B bedrifter	C	D	E	F	G	H
◆				=ExpReg('t,'bedrifter				
1	0	63200	Titel	Eksponentiel regre...				
2	5	42400	RegEqn	a*b^x				
3	15	21500	a	65375.2				
4	25	9800	b	0.923589				
5	32	4900	r²	0.996446				
6	33	4500	r	-0.998222				
7			Resid	{-2175.2300520653...				
8			ResidTra...	{-0.0338391401869...				

Opgave 10

a)

$f(x) := 35.9 \cdot (1 - 0.493 \cdot e^{-0.499 \cdot x})^{2.604} | 0 \le x \le 25$ ▸ *Udført*

$f(10)$ ▸ 35.5872

Dvs. udbyttet er ca. 35,6 ton per hektar efter 10 år.

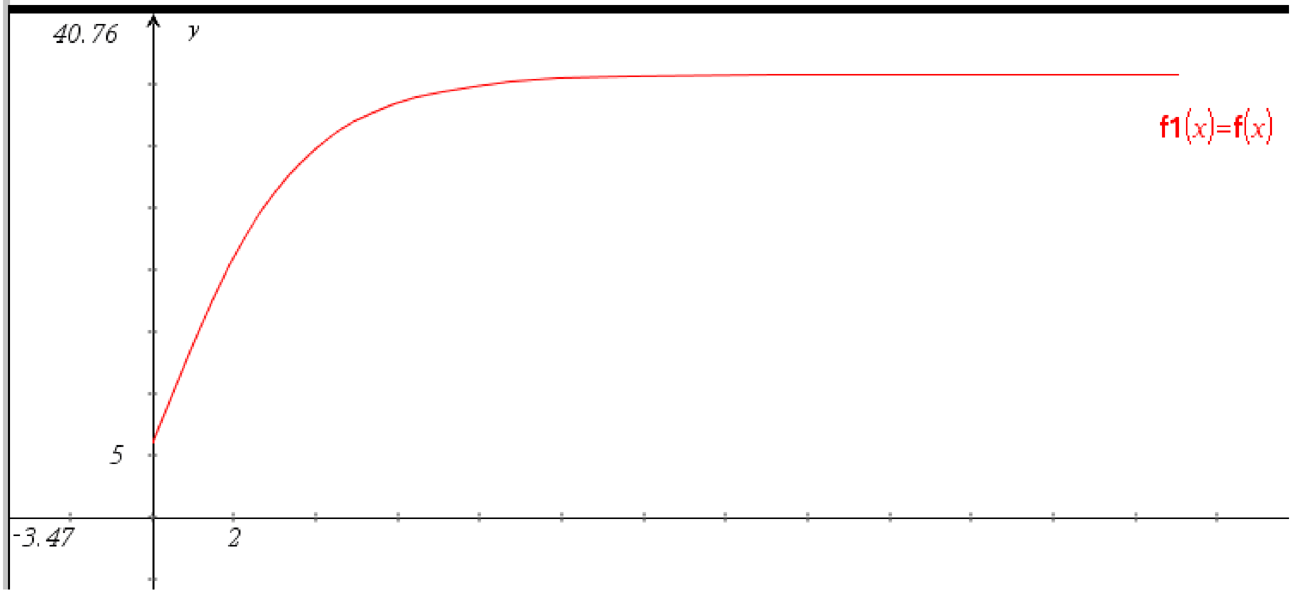
b)

Væksthastigheden bestemmes som f'(5):

$\text{fmærke}(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført*

$\text{fmærke}(5)$ ▸ 1.77498

Dvs. i palmens 5. år vokser udbyttet med 1.77498tons per hektar per år.



Opgave 11

a)

Afstanden fra punkt G til plan β, dist(G,β) beregnes:

$$\frac{23\cdot 16+9\cdot 14-736}{\sqrt{23^2+9^2}} \blacktriangleright \frac{-121\cdot\sqrt{610}}{305} = -9.79829$$

Efter at man tager den numeriske værdi fås **dist(G,β)=9,8 cm**

b)

Ligning for en plan α der indeholder sidefladen $CADF$ ønskes bestemt.

Først bestemmes to vektorer der ligger der ligger i planen α:

$\textbf{v\_ac}:=\begin{bmatrix}32-0 & 32-32 & 0-0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}32 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\textbf{v\_ad}:=\begin{bmatrix}9-0 & 23-32 & 23-0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}9 & -9 & 23\end{bmatrix}$

Nu kan normalvektoren beregnes som krydsproduktet:

$\textbf{nv\_}\boldsymbol{\alpha}:=\text{crossP}(\textbf{v\_ac},\textbf{v\_ad}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}0 & -736 & -288\end{bmatrix}$

Ved at finde største fælles divisor (gcd) kan denne vektor gøres "pænere":

$\text{gcd}(-736,-288) \blacktriangleright 32$ dvs. $\textbf{nv\_}\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0 & \frac{-736}{32} & \frac{-288}{32}\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}0 & -23 & -9\end{bmatrix}$

Nu kan lignigen for planen α opskrives ud fra normalvektoren ovenfor samt ud fra punktet C(32,32,0) der ligger i planen:

$-23\cdot(y-32)-9\cdot(z-0)=0 \blacktriangleright -23\cdot y-9\cdot z+736=0$

c)

Vinklen mellem de to plan α og β beregnes som vinklen mellem de to normalvektorer $\textbf{nv\_}\boldsymbol{\beta}:=\begin{bmatrix}23 & 0 & 9\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}23 & 0 & 9\end{bmatrix}$ og $\textbf{nv\_}\boldsymbol{\alpha}$:

$$v=\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\textbf{nv\_}\boldsymbol{\beta},\textbf{nv\_}\boldsymbol{\alpha})}{\text{norm}(\textbf{nv\_}\boldsymbol{\beta})\cdot\text{norm}(\textbf{nv\_}\boldsymbol{\alpha})}\right) \blacktriangleright 97.6307 \text{ grader.}$$

Men der er to vinkler mellem α og β, som tilsammen giver 180 grader.

Jeg vil nu gerne bestemme den spidse vinkel, idet figuren viser, at vinklen mellem de to plan er en spids vinkel: $180-97.6307 \blacktriangleright 82.3693$

Vinklen mellem α og β er altså ca. **82,4 grader**.

Opgave 12

$\mathbf{f}(x):=\frac{\ln(x)\cdot 1}{x}|x>0$ ▸ *Udført*

a) Monotoniforholdene for f ønskes bestemt

Først bestemmes mulige ekstrema ved f'(x)=0

$\mathbf{fmærke}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført* dvs. $\mathbf{fmærke}(x)$ ▸ $\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}, x>0\right.$

$\text{solve}(\mathbf{fmærke}(x)=0,x)$ ▸ $x=e$

Af ovenstående samt af tegningen af grafen for f fås at grafen er

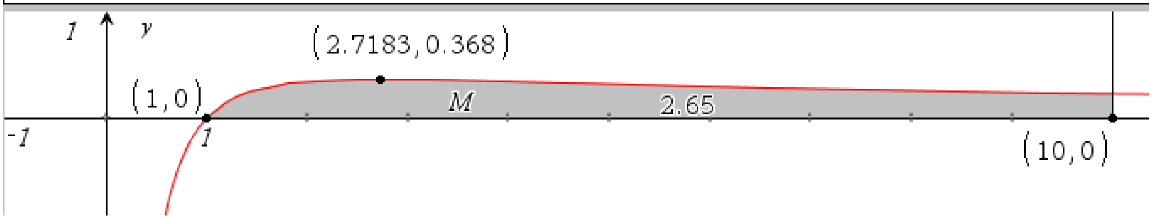
voksende i intervallet]0;e]

og aftagende i intervallet [e;∞[

med maksimum for x=e

b)

$$A_M=\int_1^{10}\frac{\ln(x)\cdot 1}{x}\,dx \;▸\; 2.65095$$



Opgave 13

a) Logistisk vækst $y'=ay(M-y)$

Væksthastigheden til det tidspunkt, hvor antal smittede var 100 beregnes ved indsættelse,

idet N=100 i differentialligningen : $\frac{dn}{dt}=0.00526\cdot 100\cdot(209-100)$ ▸ $\frac{dn}{dt}=57.334$

Heraf ses, at på det tidspunkt hvor 100 var smittede, da er væksthastigheden **57 smittede per døgn**

b)

N(t) ønskes beregnet:

$\text{deSolve}(\mathbf{n}'=0.00526\cdot\mathbf{n}\cdot(209-\mathbf{n}) \text{ and } \mathbf{n}(30)=103,t,\mathbf{n})$ ▸ $\mathbf{n}=\frac{209.\cdot(3.00218)^t}{(3.00218)^t+2.16565\text{E}14}$

$$\mathbf{n}(t):=\frac{209.\cdot(3.00218)^t}{(3.00218)^t+2.16565\text{E}14}$$

Der er tale om logistisk vækst, hvor 209 netop er mætningstallet.

Det betyder, at for $t\to\infty$ da vil $\mathbf{n}(t)$ nærme sig det maksimale antal smittede på 209 smittede.

Opgave 14

a) Beholderens rumfang bestemmes ved x=2 og y=5

Først bestemmes højden h i trekanten vha. Pythogoras:

$h^2=x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2$ ▸ $h^2=\frac{3\cdot x^2}{4}$ dvs. $h=\sqrt{\frac{3\cdot x^2}{4}}$ ▸ $h=\frac{\sqrt{3}\cdot|x|}{2}$

Dernæst bestemmes volumen idet arealet af trekanten er A=½*h*G:

$V=0.5\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot|x|}{2}\cdot x\cdot y$ ▸ $\frac{\sqrt{3}\cdot x\cdot|x|\cdot y}{4}$. Værdierne for x og y indsættes: $V=0.5\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2}\cdot 2\cdot 5$ ▸ $5\cdot\sqrt{3}$

b) Overfladearealet ønskes bestemt som funktion af x (og ikke af x og y)

Volumen oplyses til $1m^3$ hvorved y kan udtrykkes som funktion af x: $\text{solve}\left(0.5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^2\cdot y=1,y\right)$ ▸ $y=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3\cdot x^2}$

De to endefladerne har hver arealet $A=0.5\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{2}$ og De tre lange sider har hver arealet x· y

Det samlede overfladeareal fås altså: $O=2\cdot 0.5\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{2}+3\cdot x\cdot y$ ▸ $\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{2}+3\cdot x\cdot y$

For y indsættes $y=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3\cdot x^2}$ hvorved fås: $O=2\cdot 0.5\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{2}+3\cdot x\cdot\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3\cdot x^2}$ ▸ $\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{2}+\frac{4\cdot\sqrt{3}}{x}$

c) Mindst muligt overfladeareal:

$\mathbf{o}(x):=\frac{\sqrt{3}\cdot x^2}{2}+\frac{4\cdot\sqrt{3}}{x}$ ▸ *Udført* og $\mathbf{omærke}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{o}(x))$ ▸ *Udført*

$\text{solve}(\mathbf{omærke}(x)=0,x)$ ▸ $x=2^{\frac{2}{3}}$ Tilnærmet værdi $2^{\frac{2}{3}}$ ▸ 1.5874

Af grafen for O(x) ses, at der er tale om et minimum, og overfladearealet er mindst muligt for $x=2^{\frac{2}{3}}\approx 1.5874$