① parallelle dvs. determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})=0$

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2t-3 & 7t-5 \end{vmatrix} = 2(7t-5)-4(2t-3) = 14t-10-8t+12$$

$$= 6t+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{6}=\underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

② Toppunktsbestemmelse.

Ekstrema bestemmes : $y'=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$.

$x=3$ indsættes i ligningen for parablen : $y=3^2-6\cdot 3+19=9-18+19=10$

Dvs. koordinatsættet til toppunktet er $\underline{\underline{(x,y)=(3,10)}}$.

③ $$R=\frac{4p\cdot l}{\pi\cdot d^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{d=\pm\sqrt{\frac{4p\cdot l}{\pi\cdot R}}}}$$

④ $$\int_0^2 3x^2-10x\,dx = \left[3\cdot\tfrac{1}{3}x^3-10\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left[x^3-5x^2\right]_0^2 = (8-20)-(0) = \underline{\underline{-12}}$$

⑤ $f(x)=x\cdot\ln x \qquad f'(x)=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x = 1+\ln x$.

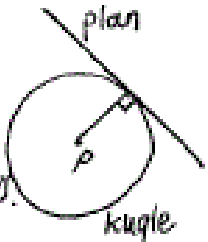
Indsættes i differentialligningen for at se om $f(x)$ er en løsning:

$$1+\ln x \stackrel{?}{=} \frac{x\cdot\ln x}{x}+1$$

$$\Updownarrow$$

$1+\ln x = \ln x+1$ Heraf ses at ligningen er sand og at $f(x)$ derfor er en løsning.

⑥ Hvis α er tangentplan til K må det gælde at den vinkelrette afstand $\text{dist}(P,\alpha)$ netop er lig med kuglens radius.



P er kuglens centrum $P(1,3,-2)$ (aflæst i kuglens ligning).

Kuglens radius aflæses i kuglens ligning til 6.

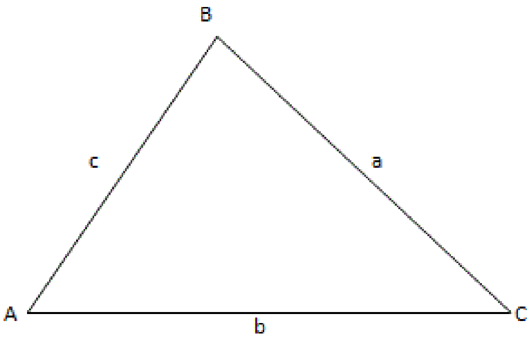
$$\text{dist}(P,\alpha) = \frac{|2\cdot 1-3+2\cdot(-2)-13|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \left|\frac{2-3-4-13}{\sqrt{4+1+4}}\right| = \left|\frac{-18}{3}\right| = 6$$

Da afstanden $\text{dist}(P,\alpha)=6$ som netop er kuglens radius må α altså være en tangentplan til K.

Opgave 7

a) Opgaven regner sig selv i WordMat – download gratis på www.eduap.com hvis du har officepakken 07 eller nyere.

WordMat's trekantsløser anvendes med input: a = 7.1 , b = 8.5 , c = 5.9



A = 55,61121°
B = 81,09421°
C = 43,29458°

a = 7,1
b = 8,5
c = 5,9

Vinkel A og B findes vha. cosinusrelationer

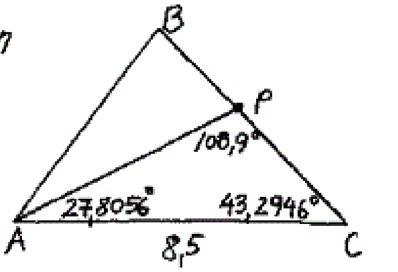
$$A = \cos^{-1}\left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}9^2+8{,}5^2-7{,}1^2}{2\cdot 8{,}5\cdot 5{,}9}\right) = 55{,}61121°$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}9^2+7{,}1^2-8{,}5^2}{2\cdot 7{,}1\cdot 5{,}9}\right) = 81{,}09421°$$

Vinkel C findes vha. vinkelsum = 180° i en trekant

$$C = 180° - A - B = 180° - 55{,}61121° - 81{,}09421° = 43{,}29458°$$

b) Punktet hvor vinkelhalveringslinjen rammer linjestykke BC kaldes P. Herved dannes ΔAPC.



$$\angle CAP = \tfrac{1}{2}\cdot\angle ABC$$

$$\angle APC = 180° - \angle CAP - \angle C$$

$$|AP| = \frac{8{,}5\cdot\sin(\angle C)}{\sin(\angle APC)} = \frac{8{,}5\cdot\sin(43{,}2946)}{\sin(108{,}8998145)} = 6{,}16103 \approx \underline{\underline{6{,}2}}$$

Opgave 8

a) Eksponentiel regression på CAS

Forskriften for f er altså:

$f(x)=\mathbf{f1}(x) = 499.997\cdot(1.2)^x$

b)

$$T_2 = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(\mathbf{stat.b})} ▸ 3.80175$$

Dvs. **T_2=3,8**

Pas på! I TINspire byttes om på a og b i forhold til formelsamlingen.

	A x	B y	C	D
◆				=ExpReg('
1	3	864	Titel	Ekspone...
2	6	1493	RegEq...	a*b^x
3			a	499.997
4			b	1.2
5			r²	1.
6			r	1.
7			Resid	{1.18E-11...
8			ResidT...	{3.4E-15,...
9				

Opgave 9

a)

Den spidse vinkel mellem de to skærende linjer ønskes bestemt.

Først defineres de to retningsvektorer

$$\textbf{retvek\_l}:=\begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\textbf{retvek\_m}:=\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$$

Vinklen bestemmes $\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\textbf{retvek\_l},\textbf{retvek\_m})}{\text{norm}(\textbf{retvek\_l})\cdot\text{norm}(\textbf{retvek\_m})}\right) \blacktriangleright 82.5266$

b)

Koordinatsættet til skæringspunktet P bestemmes:

$\text{solve}(-3\cdot t=9+3\cdot s \text{ and } 1+t=1+2\cdot s \text{ and } 6+2\cdot t=7+5\cdot s,s,t) \blacktriangleright s=-1 \text{ and } t=-2$

Dvs. linjerne skærer hinanden når s=−1 og t=−2

Skæringspunktet P findes ved at indsætte t=−2 i ligningen for l:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\6\end{bmatrix}+-2\cdot\begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}x=6\\y=-1\\z=2\end{bmatrix}$$

Dvs. skæringspunktet P(6,−1,2)

c)

l og *m* udspænder en plan. Normalvektoren til planen bestemmes:

$$\text{crossP}(\textbf{retvek\_l},\textbf{retvek\_m}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}1\\21\\-9\end{bmatrix}$$

Ud fra et punkt, her vælges punktet (0,1,6), og normalvektoren opskrives ligningen:

$1\cdot(x-0)+21\cdot(y-1)-9\cdot(z-6)=0 \blacktriangleright x+21\cdot y-9\cdot z+33=0$

10 Eksponentiel funktion:

$y = 10{,}4\cdot 1{,}246^x$ hvor x er antal år efter 2000
(gælder 1990–2000) og y er vindenergi

a) x=7 indsættes hvorved fås at den udvundne vindenergi
i år 2007 er <u>48,5 GW</u>

b) Vha. solve løses ligningen
$94{,}1 = 10{,}4\cdot a^7 \Leftrightarrow a = 1{,}36978$
Dvs. den årlige vækstrate har været <u>ca. 37%</u>

Opgave 11

a) $f(x):=x^4-3\cdot x^2-4$ ▸ *Udført*

$\text{tangentLine}(f(x),x,2)$ ▸ $20\cdot x-40$

Tangentlinjens ligning til grafen for f i $P(2,f(2))$ er altså $y=20\cdot x-40$

b) Monotoniforhold for f. Først skal mulige ekstrema bestemmes ved at beregne f'(x)=0.

Først findes f': $fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført* $\text{solve}(fm(x)=0,x)$ ▸ $x=\frac{-\sqrt{6}}{2}$ or $x=0$ or $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

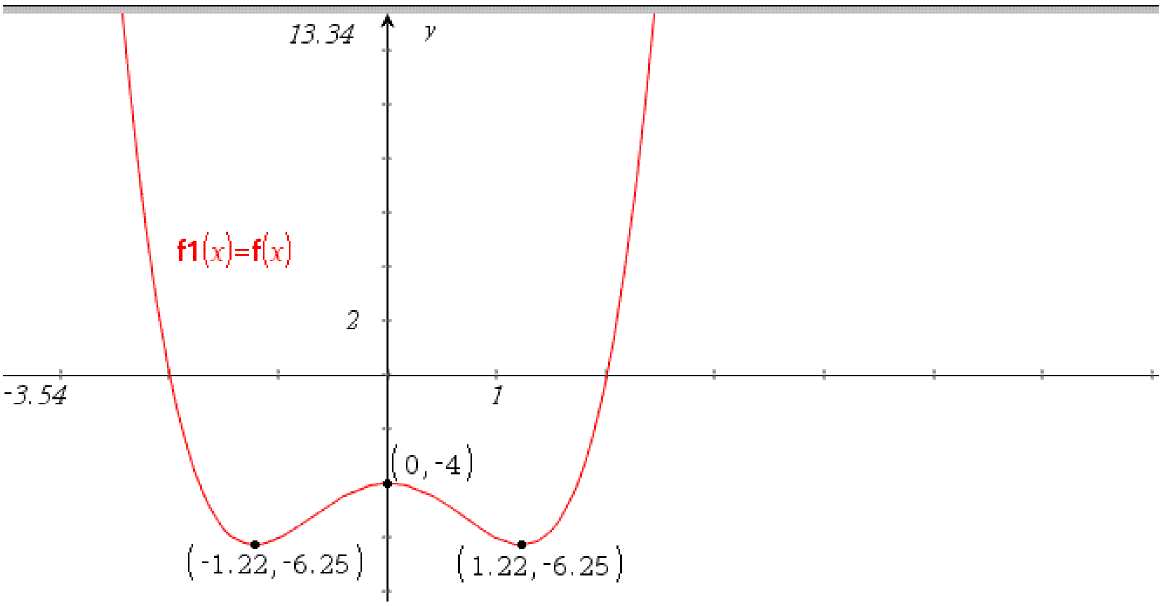
Sammenholdt med figuren nedenfor fås at der er lokalt minimum for

$x=\frac{-\sqrt{6}}{2}=x=-1.22474$ og $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ▸ $x=1.22474$.

og der er lokalt maksimum for $x=0$.

Grafen for f er voksende i intervallerne $[\frac{-\sqrt{6}}{2};0]$ og $[\frac{\sqrt{6}}{2};\infty[$

og grafen for f er aftagende i intervallerne $]-\infty;\frac{-\sqrt{6}}{2}]$ og $[0;\frac{\sqrt{6}}{2}]$



Opgave 12

	Skole 1	Skole 2
min	64 kg	60 kg
nedre	68 kg	65 kg
median	71 kg	68 kg
øvre	74 kg	70 kg
max	76 kg	79 kg

Drengene i skole 2 vejer generelt mindre en drengene i skole 1.

Nedre kvartil for vægten i skole 1 er 68 kg og i skole 2 er den 65 kg.

For skole 2 er medianen 68 kg som er lig med den nedre kvartil for skole 1 – dvs. at 50% af drengene i skole 2 vejer 68 kg eller derunder, mens det kun er 25% af drengene fra skole 1 der vejer 68 kg eller derunder.

For skole 2 er den øvre kvartil 70 kg, mens medianen for skole 1 er 71 kg. 75% af drengene i skole 2 vejer altså 70 kg eller derunder, mens det kun er halvdelen af drengene i skole 1 der vejer under 71 kg.

Der er stor forskel på minimumsværdien 60 kg og maksimumsværdien 79 kg i skole 2.
I skole 1 er minimumsværdien 64 kg og maksimumsværdien 76 kg. Der er altså en eller flere hhv. tynde og tykke drenge i forhold til skole 1.

Opgave 13

a) Skæringspunkter mellem cirkel og linje. De to sættes lig med hinanden:

$\text{solve}(x^2+2\cdot x+y^2-6\cdot y=15 \text{ and } x-2\cdot y+2=0,x,y) \blacktriangleright x=^-4 \text{ and } y=^-1 \text{ or } x=4 \text{ and } y=3$

Heraf fås de to koordinatsæt $(x_1,y_1)=\mathbf{(-4,-1)}$ og $(x_2,y_2)=\mathbf{(4,3)}$

b) Q(−4,−1). En ligning for tangenten til cirklen i Q ønskes bestemt:

Tangentens normalvektor kan bestemmes, da tangenten står vinkelret på linjen QC, hvor C er cirklens centrum. C aflæses til $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ idet cirklens ligning er:

$x^2+2\cdot x+y^2-6\cdot y=15 \iff (x+1)^2-1+(y-3)^2-9=15$

Tangentens tværvektor, som altså er vektor QC bestemmes:

$vektorQC=\begin{bmatrix} ^-1-^-4 \\ 3-^-1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Ligningen for tangenten til cirklen i Q bliver altså: $3\cdot(x-^-4)+4\cdot(y-^-1)=0 \blacktriangleright 3\cdot x+4\cdot y+16=0$

Eller udtrykt ved y: $\text{solve}(3\cdot x+4\cdot y+16=0,y) \blacktriangleright y=\frac{^-(3\cdot x+16)}{4} \iff y=-\frac{3}{4}x-4$

Opgave 14

$f(x):=x^2-k\cdot x$ ▸ *Udført*

$g(x):=k\cdot x$ ▸ *Udført*

$\text{solve}(f(x)=g(x),k)$ ▸ $k=\frac{x}{2}$ or $x=0$ dvs. integralets grænser er $x=0$ og $x=2\cdot k$

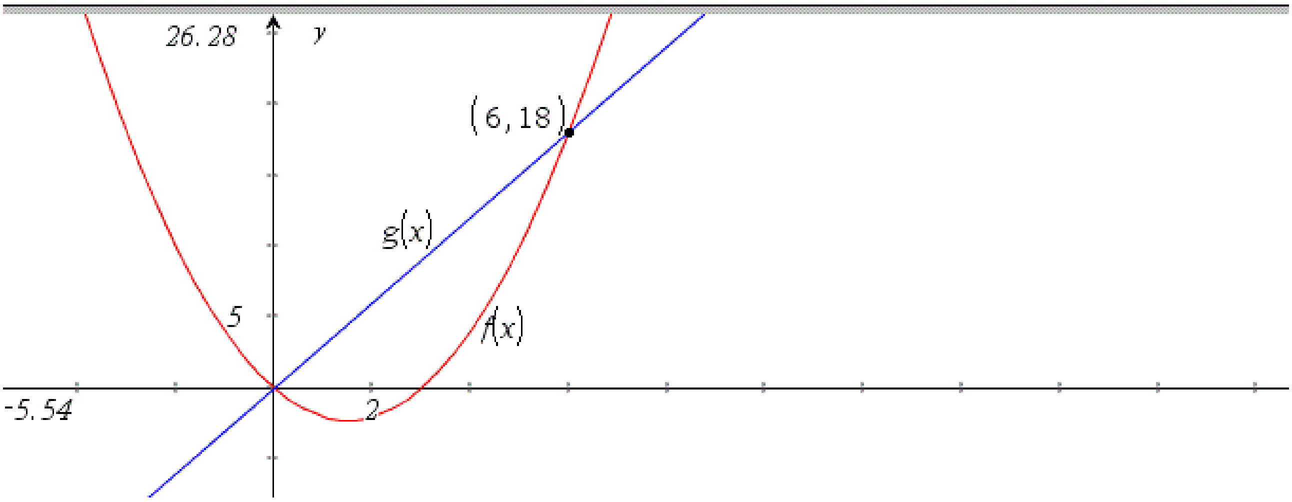
Da det gælder, at k er et positivt tal, så ligger arealet altså i 1. og/eller 4. kvadrant.

Grafen for g ligger øverst da grafen for f er en "glad" parabel med toppunkt for x>0 da k>0 (jfr. betydningen af konstanten b i et andengradspolynomium)

Nu løses integralet idet arealet skal være 36:

$$\text{solve}\left(\int_0^{2\cdot k}(g(x)-f(x))dx=36,k\right) ▸ k=3$$

Efterfølgende tegnes graferne i figuren nedenfor.



Opgave 15

V=40

V= $0.5\cdot \mathbf{h}\cdot b\cdot 5\cdot b=40$. h udtrykt ved b: $\text{solve}(0.5\cdot \mathbf{h}\cdot b\cdot 5\cdot b=40,\mathbf{h})$ ▸ $\mathbf{h}=\frac{16.}{b^2}$

Glasoverfladen udtrykkes:

$O=2\cdot 0.5\cdot \mathbf{h}\cdot b+5\cdot b\cdot (\mathbf{h}^2+b^2)^{0.5}$. O som funktion af b idet $\mathbf{h}:=\frac{16.}{b^2}$ ▸ $\frac{16.}{b^2}$:

$$O=2\cdot 0.5\cdot \mathbf{h}\cdot b+5\cdot b\cdot (\mathbf{h}^2+b^2)^{0.5} ▸ \frac{5\cdot\sqrt{b^6+256.}}{b}+\frac{16.}{b}$$

Opgave 16

Først løses differentialligningen

$\text{deSolve}\left(g'=675000\cdot t\cdot e^{-3\cdot t} \text{ and } g(0)=0,t,g\right) \blacktriangleright g=75000\cdot e^{-3\cdot t}\cdot\left(e^{3\cdot t}-3\cdot t-1\right)$

Absorberet mavesyre i løbet af 4 timer svarer til t=4:

$g(t):=75000\cdot e^{-3\cdot t}\cdot\left(e^{3\cdot t}-3\cdot t-1\right) \blacktriangleright \textit{Udført}$

$g(4) = 74994.009$

Altså er der absorberet **ca. 74994 mg** glukose 4 timer efter indtagelsen.

Opgave 17

Bemærk – hvis man regner eksakt (og ikke afrundet som nedenfor) får man korrekt 694,8 kg kunstgødning.

a) Forskriften m(x) bestemmes:

$\text{deSolve}\left(m'=3.69\text{E-}4\cdot m\cdot(15.5-m) \text{ and } m(400)=13.1,x,m\right) \blacktriangleright m=\dfrac{15.5\cdot(1.00574)^x}{(1.00574)^x+1.80517}$

$m(x):=\dfrac{15.5\cdot(1.00574)^x}{(1.00574)^x+1.80517}\Big|0\le x\le 1000 \blacktriangleright \textit{Udført}$

b) Fortjenesten f(x) kan beskrives som salgspris−udgifter. Dvs.

Fortjeneste = $700\cdot m(x)-1.97\cdot x$ dvs.

Fortjenesten som funktion af x navngives f1(x) og tegnes nedenfor.

Optimering kræver at man løser f'(x)=0 for at finde eventuelle ekstrema:

$fm(x):=\dfrac{d}{dx}(f1(x)) \blacktriangleright \textit{Udført}$ $\text{solve}\left(fm(x)=0|x>0,x\right) \blacktriangleright x=694.439$

Dvs. størst fortjeneste opnås ved **ca. 695 kg** kunstgødning.