① $a^2-b^2-(a+b)^2+2ab = a^2-b^2-a^2-b^2-2ab+2ab = \underline{\underline{-2b^2}}$

② Ortogonale dvs. prikprodukt er nul:

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 = \begin{pmatrix}1\\-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5t-1\\3\end{pmatrix} = 5t-1+3\cdot(-2t) = -t-1=0$

$\Rightarrow \underline{\underline{t=-1.}}$

③ Først bestemmes $|BC|$ vha. Pythagoras:

$|BC| = \sqrt{5^2-4^2} = \sqrt{25-16} = 3$

Forstørrelsesfaktor : $k=\frac{5}{4}=1{,}25$

$|EF| = k\cdot|BC| = \frac{5}{4}\cdot 3 = \frac{15}{4} = \underline{\underline{3{,}75}}$

④ $f(x) = x^4+\ln(2x+1)$

$f'(x) = 4x^3+\frac{1}{2x+1}\cdot(2) = 4x^3+\frac{2}{2x+1}$

$f'(1) = 4\cdot1^3+\frac{2}{2\cdot1+1} = 4+\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$

⑤ Differentialligning:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3+1}{y}$. f er løsning og $f(2)=4$

Ligningen for tangenten til grafen for f i $P(2,4)$ ønskes.
Først beregnes tangentens hældning i punktet ved at indsætte i differentialligningen: $(x,y)=(2,4)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2^3+1}{4} = \frac{9}{4}$

Tangent-Ligningen : $y=\frac{9}{4}x+b$. $(x,y)=(2,4)$ anvendes til at beregne b:

$b = y-\frac{9}{4}x = 4-\frac{9}{4}\cdot2 = 4-\frac{18}{4} = 4-4{,}5 = -\frac{1}{2}$

Dvs. tangentliniens ligning i $P(2,4)$ er $\underline{\underline{y=\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}}}$

⑥ $\int 2x\cdot(x^2+1)^5dx$ integration v. substitution.

$u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow du = 2x\,dx$

Dvs. $\int u^5 du = \frac{1}{6}u^6+k$

Dvs. $\int 2x(x^2+1)^5dx = \underline{\underline{\frac{1}{6}(x^2+1)^6+k}}$

Opgave 7

a) Ligningen for linjen, som går gennem P(3,1), og som står vinkelret på vektor a.

Dvs. at man allerede kender normalvektoren til linjen, nemlig vektor a.

Linjens ligning opskrives idet $(x_0;y_0)$ = (3,1) og linjens normalvektor $\mathbf{n}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\mathbf{va}:=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow 4\cdot(x-3)-3\cdot(y-1)=0$

Her isoleres y vha. solve: $\text{solve}(4\cdot(x-3)-3\cdot(y-1)=0,y) \blacktriangleright y=\frac{4\cdot x-9}{3}$

Altså er linjens ligning gennem P vinkelret på vektor a : $y=\frac{4}{3}\cdot x-3$

b) $\mathbf{pq}:=\begin{bmatrix} 20-3 \\ 7-1 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\left|\det\left(\begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\right)\right| \blacktriangleright 75$

Dvs. arealet er 75.

c) Projektionen af **pq** på **va**:

$\mathbf{pq}_{va}=\frac{\text{dotP}(\mathbf{va},\mathbf{pq})\cdot \mathbf{va}}{25} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$

Opgave 8

Potensregression

a:=**stat.b** ▸ 0.2

b:=**stat.a** ▸ 201.

	A list1	B list2	C	D	E
◆				=PowerRe	
1	32	402	Titel	Potensre...	
2	243	603	RegEqn	a*x^b	
3			a	201.	
4			b	0.2	
5			r²	1.	
6			r	1.	
7			Resid	{2.2E-12...	
8			ResidTra...	{3.9E-15...	

Opgave 9

a) Eksponentiel regression

– HUSK det er forbudt kun at bruge to punkter fra tabellen!

a:=**stat.b** ▸ 0.951225

i0:=**stat.a** ▸ 100.003

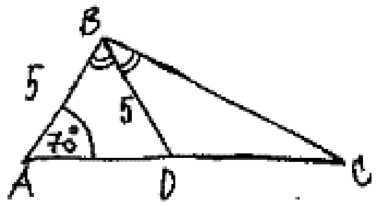
b) Halveringskonstanten:

$$T_{½} = \frac{\log_{10}(0.5)}{\log_{10}(a)} ▸ 13.8616$$

	A list1	B list2	C	D
◆				=ExpReg('lis
1	1	95.1	Titel	Eksponen...
2	3	86	RegEqn	a*b^x
3	4	81.9	a	100.003
4	5	77.9	b	0.951225
5	7	70.5	r²	0.999993
6	10	60.7	r	-0.999997
7	15	47.2	Resid	{-0.024957...
8			ResidTra...	{-2.623974...

(10)

a) Sinusrelationerne, hvor man beregner en vinkel – vær opmærksom på to løsninger.



$\frac{\sin 70}{5} = \frac{\sin D}{5} \Rightarrow$

$\angle D = \sin^{-1}(\sin 70°) = 70°$ eller $180 - 70 = 110°$, men $110°$ er ikke en løsning, da vinkelsummen i en trekant er $180°$ og da $180° - 110° - 70° = \angle ABD = 0$.

Derfor er $\angle ADB = 70°$

$|AD|$ beregnes vha. cosinusrelationerne, da $\angle ABD = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$

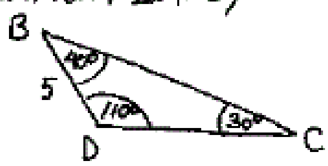
$|AD| = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 40°} = \sqrt{50 - 50 \cos 40°} = 3{,}42$

b) $\angle ABD = 2 \cdot 40° = 80°$ da linien BC halverer vinklen $\angle ABD$.

$\angle C = 180° - 70° - 80° = 30°$ (ses af vinkelsummen i $\triangle ABC$)

$\angle D = 180° - 70° = 110°$

Sinusrelationerne: $|BC| = \frac{5 \cdot \sin 110°}{\sin 30°} = 9{,}4$



Opgave 11

a) Monotoniforhold

$f(x):=(x+1)\cdot e^{-x}$ ▸ *Udført*

$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført*

$\text{solve}(fm(x)=0,x)$ ▸ $x=0$

Sammenholdt med grafen til højre ses, at der er et maksimum i x=0.

Grafen er voksende i intervallet $]-\infty;0]$ og aftagende i intervallet $[0;\infty]$.

b) Arealet af M

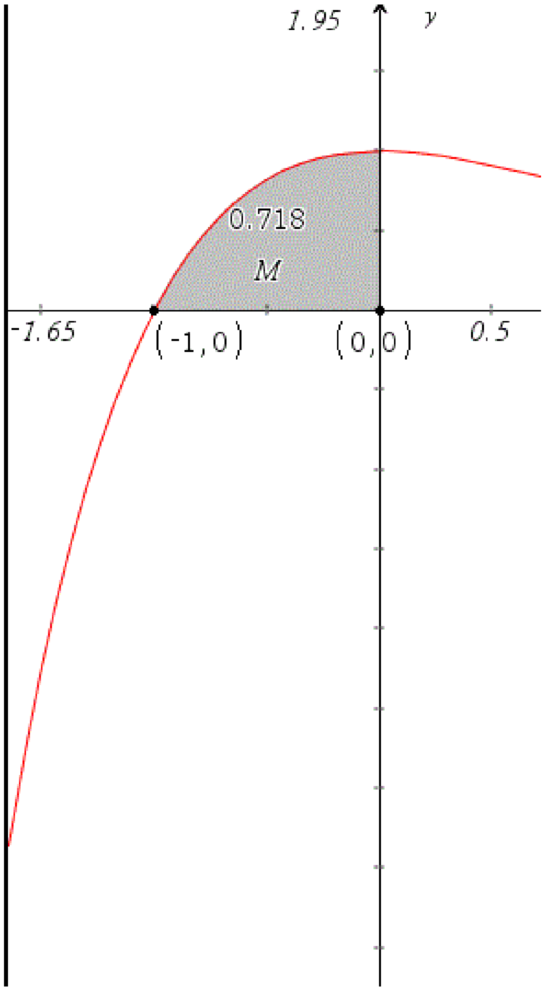
Skæringspunkt med x-aksen: $\text{solve}(f(x)=0,x)$ ▸ $x=-1$

Skæringspunkt med y-aksen: $f(0)$ ▸ 1

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ ▸ $e-2$. Tilnærmet fås $e-2$ ▸ 0.718282

c) Omdrejningslegemets rumfang beregnes:

$\pi\cdot\int_{-1}^{0} (f(x))^2\,dx$ ▸ 1.87636



Opgave 12

a) En normalvektor n til planen aflæses direkte som koefficienterne i ligningen:

$$\mathbf{n}:=\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

Vektoren mellem O og P beregnes til:

$$\mathbf{op}:=\begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}:=\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{n},\mathbf{op})}{\mathrm{norm}(\mathbf{n})\cdot\mathrm{norm}(\mathbf{op})}\right) \blacktriangleright 50.58$$

Det var vinklen mellem planens normalvektor og linjen.

Nu beregnes den spidse vinkel (kaldet s) mellem planen og linjen:

$s=90-\mathbf{v} \blacktriangleright s=39.42$. Altså er vinklen **39,4 grader**

b) For at kunne bestemme kuglens ligning, skal man kende kuglens radius.

Afstanden m2ellem kuglens centrum P og planen er netop radius. Denne afstand beregnes:

$$r = \mathrm{dist}(P,\text{planen}) = \frac{|2\cdot 7-3-2\cdot -2-6|}{\left(2^2+(-1)^2+(-2)^2\right)^{0.5}} \blacktriangleright 3.$$

Dvs. Kuglens ligning: $(x-7)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=3^2$

c)

Parameterfremstillingen for linjen der går genne P og står vinkelret på planen kan opskrives ud fra punktet P(7,3,−2) og retningsvektoren som er planens normalvektor. Altså fås linjens parameterfremstilling: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}x=2\cdot t+7\\y=3-t\\z=-2\cdot t-2\end{bmatrix}$

Indsættes værdierne i planen ligning bestemmes t:

$\mathrm{solve}(2\cdot(7+2\cdot t)-(3-t)-2\cdot(-2-2\cdot t)-6=0,t) \blacktriangleright t=-1$

Indsætte t=−1 i linjens ligning fås altså koordinatsættet for Q:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}+-1\cdot\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}x=5\\y=4\\z=0\end{bmatrix}$$

Opgave 13

a) Differentialligningen løses vha. CAS:

$$\text{deSolve}\left(v'=1.93\text{E-}4\cdot v\cdot(139.6-v) \text{ and } v(0)=7.3,t,v\right) \blacktriangleright v=\frac{139.6\cdot(1.02731)^t}{(1.02731)^t+18.1233}$$

b) Først findes det tidspunkt hvor væksthastigheden er størst vha. solve:

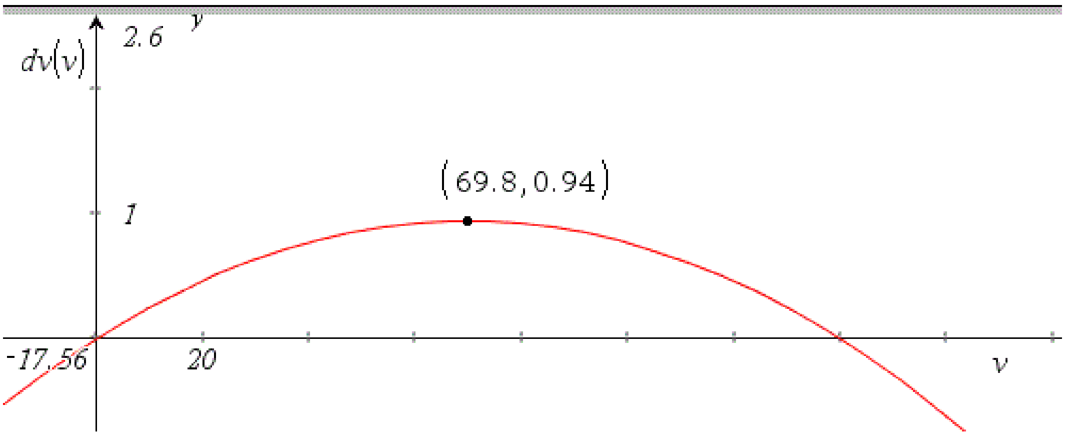
Først defineres: $\mathbf{dv}(v):=1.93\text{E-}4\cdot v\cdot(139.6-v) \blacktriangleright \textit{Udført}$

Denne skal differentieres for at finde extrema: $\mathbf{ddv}(v):=\frac{d}{dv}(\mathbf{dv}(v)) \blacktriangleright \textit{Udført}$

Dernæst beregnes eventuelle minima eller maxima vha. solve:

$\text{solve}(\mathbf{ddv}(v)=0,v) \blacktriangleright v=\frac{349}{5}$ eller tilnærmet $\frac{349}{5} \blacktriangleright 69.8$

Dvs. at grisens vægt er 69,8 kg når væksthastigheden er størst.



⑭ $f'(1)=-2$. Man får at vide, at l er tangent i punktet $P(1,f(1))$. Hældningskoefficienten for l er -2 som netop også er differentialkvotienten i $x=1$, altså $f'(1)=-2$.

$f(1)=-1$. Når l er tangent til grafen for f betyder det, at $y = f(x)$ for $x=1$. $x=1$ indsættes i ligningen for l:

l: $y = -2\cdot 1+1 = -1$ hvilket netop er lig $f(1)$

Dvs. $f(1)=-1$.

Tallene b og c bestemmes.

Først differentieres $f(x)$ og b bestemmes idet $f'(1)=-2$

$f'(x) = 2x+b$. $f(1)=2\cdot 1+b=-2 \Leftrightarrow \underline{\underline{b=-4}}$

Dernæst benyttes $f(1)=-1$ til at bestemme c:

$f(1) = 1^2+(-4)\cdot 1+c=-1 \Leftrightarrow \underline{\underline{c=2}}$

Opgave 15

a) Tragtens volumen V= 40. Vha. CAS udtrykkes s som funktion af r:

$\text{solve}\left(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot 2\cdot r+\pi\cdot r^2\cdot \mathbf{s}=40,\mathbf{s}\right) \blacktriangleright \mathbf{s}=\frac{-2\cdot(\pi\cdot r^3-60)}{3\cdot\pi\cdot r^2}$

Altså kan s udtrykkes ved r: $\mathbf{s}:=\frac{-2\cdot(\pi\cdot r^3-60)}{3\cdot\pi\cdot r^2} \blacktriangleright \frac{-2\cdot(\pi\cdot r^3-60)}{3\cdot\pi\cdot r^2}$

Overfladearealet udtrykkes som funktion af r

$\pi\cdot r\cdot\left(r^2+(2\cdot r)^2\right)^{0.5}+2\cdot\pi\cdot r\cdot \mathbf{s}$

som omskrives vha. CAS:

$\text{expand}\left(\pi\cdot r\cdot\left(r^2+(2\cdot r)^2\right)^{0.5}+2\cdot\pi\cdot r\cdot \mathbf{s}|0\le r\le 4\right) \blacktriangleright \pi\cdot\sqrt{5}\cdot r^2-\frac{4\cdot\pi\cdot r^2}{3}+\frac{80}{r}$

På samme måde omskrives udtrykket fra opgaveformuleringen vha. CAS:

$\text{expand}\left(\pi\cdot\left(5^{0.5}-\frac{4}{3}\right)\cdot r^2+\frac{80}{r}\right) \blacktriangleright \pi\cdot\sqrt{5}\cdot r^2-\frac{4\cdot\pi\cdot r^2}{3}+\frac{80}{r}$

Det ses, at de to udtryk er ens – hermed er det ønskede vist.

b) Overfladen mindst mulig. Dvs. O'(r)=0 skal beregnes:

$\mathbf{om}(r):=\frac{d}{dr}\left(\pi\cdot\sqrt{5}\cdot r^2-\frac{4\cdot\pi\cdot r^2}{3}+\frac{80}{r}\right) \blacktriangleright \textit{Udført}$

$\text{solve}(\mathbf{om}(r)=0,r) \blacktriangleright r=2.41611$

Det ses af figuren, at der er tale om et minimum.

Tragtens overflade er mindst mulig når **x=2,42**